Universidad de Buenos Aires
Instituto Libre de Segunda Enseñanza

MATEMÁTICA

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

QUINTO AÑO

Se agradece el aporte de los profesores María Inés Sáinz y Daniel Dacunti

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

INTERVALOS – INECUACIONES – FUNCIONES

1) Escribir utilizando intervalos los subconjuntos de R que son solución de las siguientes inecuaciones

a) $(2x-3)^2 > 4(x+1)(x+2)$ b) $x^2 + 2x + 1 \leq 4$

c) $\left|x^2 - 1\right| < 2$ d) $x^2 - \frac{1}{2} \leq 4 - x^2$ e) $\frac{(-\frac{x}{2}+1)^2}{2} < 72$

f) $\left|-2x+5\right| < x-2$ g) $x^2 - x < 0$ h) $x^3 > x$

i) $\frac{x^2-2}{\left|2-x\right|} > 0$ j) $\frac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{1-x^2}} > 0$

2) Hallar, para cada una de las siguiente funciones, $f^{-1}(y_0)$ (preimagen de y_0)

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 2}}$ $y_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{3}{4 - \text{tg}x}$ $y_0 = 1$

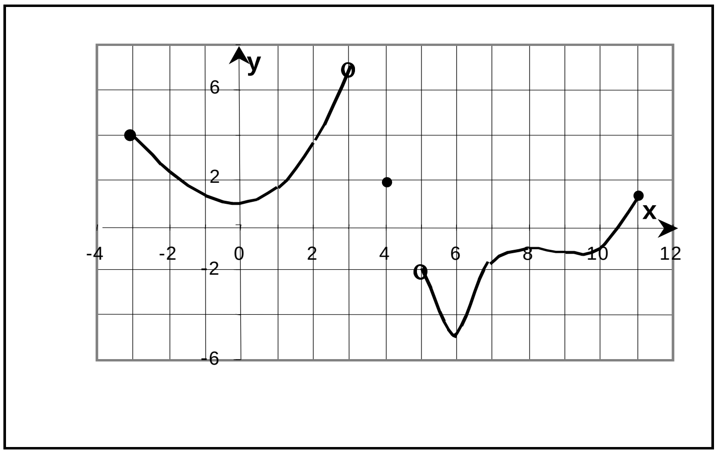
3) a) Indicar si el gráfico representa una función y=f(x).Justificar

Si la respuesta al ítem a) es afirmativa, se pide:

b) Halle, si es posible: i) f(-3) ii) f(3) iii) f(4) iv) f(5)

c) Encontrar el dominio de f

d) Encontrar el conjunto imagen de f.



4) Se definen las funciones:

$$f_1 : Df_1 \longrightarrow R \,/\, f(x) = \begin{cases} -2x(x+2) & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f_2 : Df_2 \longrightarrow R \,/\, f(x) = \begin{cases} 2 + 2^x & \text{si } x \le -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \log_2(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f_3 : Df_3 \longrightarrow R \,/\, f(x) = \begin{cases} \log_5(x^2 - 4) & \text{si } x \le 3 \\ -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

y se pide:

a) Dominio, conjunto de ceros, conjuntos de positividad y negatividad, ecuaciones de las asíntotas, conjunto imagen y gráfico aproximado de las mismas.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones f_2 y f_3.

5) Para cada una de las siguientes funciones definidas de R en R, se pide:

Definir como función partida, determinar conjunto imagen y representar gráficamente

$$f_1(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(Función módulo)}$$

$f_2(x) = |2x - 4|$ $\qquad$ $f_3(x) = 3 - |2x - 4|$

$f_4(x) = x + |x|$ $\qquad$ $f_5(x) = x - |x|$

6) Representar gráficamente las funciones siguientes:

$f_1(x) = |x^2 - 4x + 3|$ $\qquad$ $f_2(x) = |-x^2 + 4x - 5|$

$f_3(x) = \log_2|x - 3|$ $\qquad$ $f_4(x) = |\log_2(x - 3)|$

$$f_5(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\right|$$

7) Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$

c) $h(x)=\ln(2-x)+\ln(2+x)$

d) $l(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

e) $k(x)=\sqrt{-\left|x^2-1\right|}$

f) $m(x)=\sqrt[4]{x^2(2-x^2)-1}$

g) $p(x)=\sqrt{x+|x|-2}$

h) $q(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2(2-x^2)-1}}$

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{|x|-3}}$

j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+3x^2-4}}{4x-x^2}$

k) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$

8) Dadas $f(x)=x+1$, $g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ y $h(x)=\sqrt[3]{(x+1)^3}$ se pide:

a) Indicar el dominio de cada una
b) Representarlas gráficamente
c) Contestar y justificar: ¿f = g? ¿f = h?

9) Sabiendo que $f(x)=x^3-3x^2-x+3$, determinar el conjunto de ceros y graficar: $f(x)$, $|f(x)|$ y $f(|x|)$

RESPUESTAS:

1)
a) S= $(-\infty\ ;1/24)$
b) S= [-3;1]
c) S = $(-\sqrt{3}\ ;\sqrt{3}\ )$
d) S= [-3/2;3/2]
e) S = (-22; 26)
f) S = (7/3;3)
g) S= (0;1)
h) S =$(-1;0) \cup (1;+\infty\ )$
i) S=$((-\infty\ ;-\sqrt{2}\ ) \cup (\sqrt{2}\ ;+\infty))-\{2\}$
j)$\varnothing$

2) a) {-1, 2} b) $\{\frac{\pi}{4} + k\pi\ /k \in\ Z\}$

3) c) D=[-3,3) U {4} U (5,11] d) Imf= [-5,7)

4) a)
$Df_1 = R \quad C^0(f_1) = \{-2;0;2;4\} \quad C^+(f_1) = (-2,0)\cup(2,4) \quad C^-(f_1) = (-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(4,+\infty)$
$\mathrm{Im}(f_1) = (-\infty,1]$ asíntotas no tiene
$Df_2 = R \quad C^0(f_2) = \varnothing \quad C^+(f_2) = R \quad C^-(f_2) = \varnothing$
$\mathrm{Im}(f_2) = (1;+\infty)$ y = 2 asíntotas horizontal.
$Df_3 = (-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \quad C^0(f_3) = \{-\sqrt{5};\sqrt{5}\} \quad C^+(f_3) = (-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},3)$
$C^-(f_3) = (-\sqrt{5},-2)\cup(2,\sqrt{5})\cup(3,+\infty) \quad \mathrm{Im}(f_3) = R$ asíntotas verticales $x = -2;$
$x = 2,$ asíntota horizontal: $y = -1$
b) f_2 crece$:(-\infty;-1)\cup(0;2)\cup(2;+\infty) \quad f_2$ decrece$:(-1;0)$
f_3 crece$:(2;3) \quad f_3$ decrece$:(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

5) $\mathrm{Im}_1 = [0;+\infty)$; $\mathrm{Im}_2 = [0;+\infty)$; $\mathrm{Im}_3 = (-\infty;3]$; $\mathrm{Im}_4 = [0;\infty)$; $\mathrm{Im}_5 = (-\infty,0]$

7) a) $(-\infty,-2]$ U $[1, +\infty)$; b)$(-\infty,-2)$U$(1,+\infty)$; c)(-2,2) ; d)R-Z ; e){-1,1} ;

f){-1,1} ; g) $[1,+\infty)$; h)ϕ ;i) $(-\infty;-3)\cup[-1;1]\cup(3;+\infty)$;j) $[1;\infty)\cup\{-2\}-\{0;4\}$;

k) $(1;+\infty)$

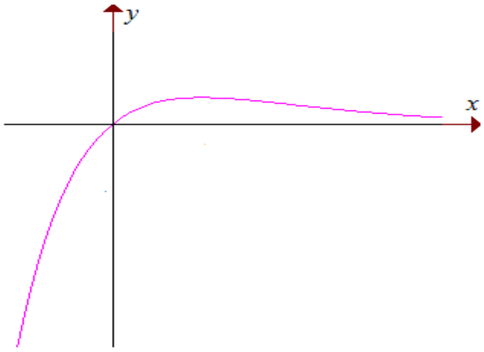
9) Para $f(x)$ y $|f(x)|$: $C^0 = \{-1;1;3\}$. Para $f(|x|)$: $C^0 = \{-3;-1;1;3\}$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

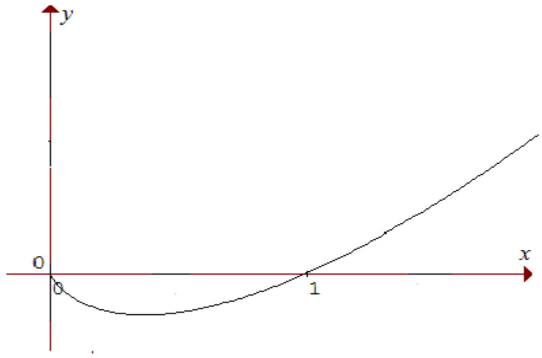
LÍMITES – CONTINUIDAD

1) A partir de los siguientes gráficos determinar si existe, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

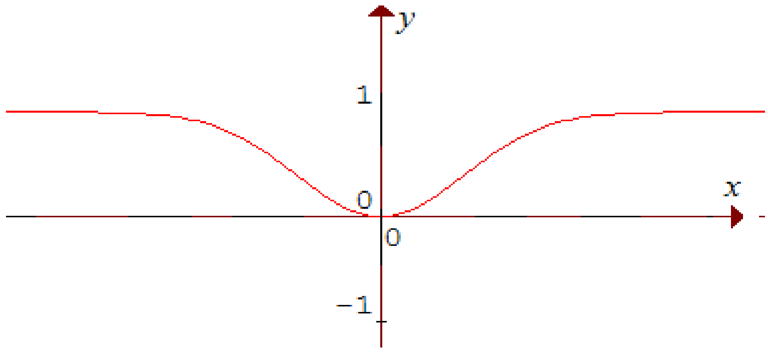
a)



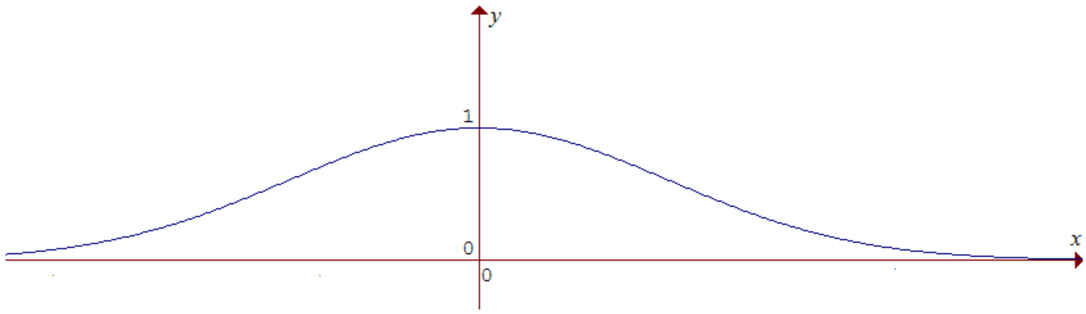
b)



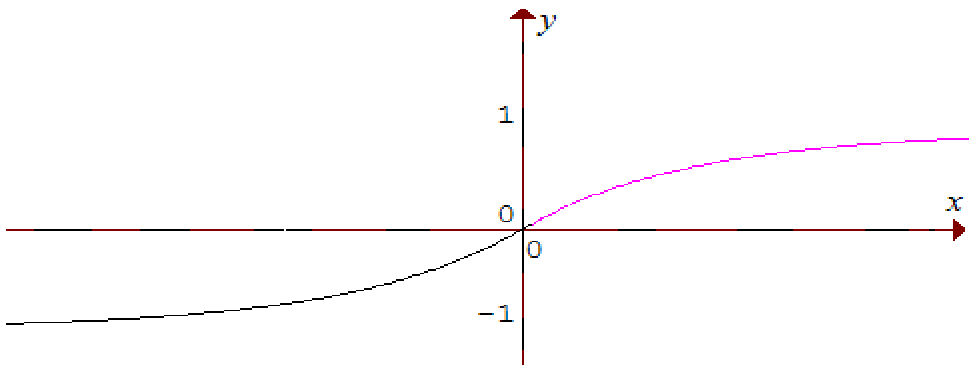
c)



d)



e)



2) Dibujar una función $f : R \to R$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

a) $(-2;4)\in f$ $\quad \lim_{x\to 3} f(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-1$ $\quad 3$ *es raiz y* $f(0)=f(-2)$

b) $(3;-2)\in f$ $\quad \lim_{x\to -2} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=3$ $\quad -2$ *es raiz y* $f(0)=f(3)$

c) -1 *y* 3 sean las unicas raices $\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=2$

d) -2 *y* 1 sean las unicas raices $\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=2$ $\quad \lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

3) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2+4}$ b) $\lim_{x\to 2} \ln(x-1)$ c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-2}{x-2}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2).(x-1)^2}{4.\cos x}$ e) $\lim_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{x}{8x+1}}$ f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1}$ h) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+2}{3}$ i) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^{x-1}$

j) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-9}$ k) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ l) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{4}{x^3+1}$

m) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x+2}$ n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3}{x}$ o) $\lim_{x\to \infty} 2^{x+1}$

LIMITES INDETERMINADOS

4) Cociente de polinomios

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+3x^2}{x^3+x}$ c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-10x+25}$

d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^5+2x^3+x^2+2}{x^3-3x^2-2x+2}$ e) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{10x+5}$ f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^3+2x-5}{x^4+x-2}$

g) $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-16}$ h) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15}$

i) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2).(x-3)}$ j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(a+x)^2 - a^2}{x}$ k) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \right)^{\frac{2x-2}{x-1}}$

5) Trigonométricos:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \text{tg}4x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\text{sen}(x-1)}{x^2 - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\text{tg}(x^2 - 4)}{\text{sen}(x-2)}$

6) Irracionales:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{\sqrt{x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x-2}}$ f) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$ j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

7) Infinito sobre infinito $: \dfrac{\infty}{\infty}$

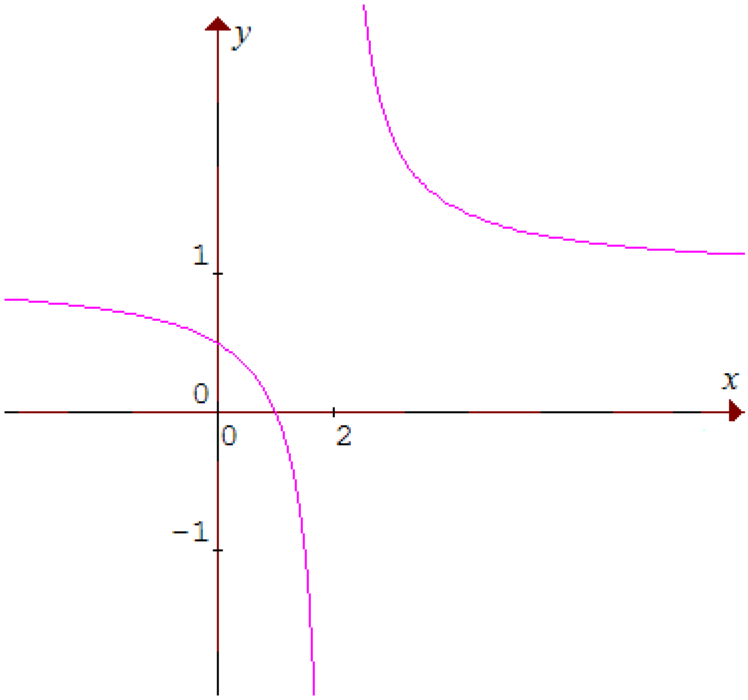
a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x + 5}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 2}{x + x^2 - 5}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$

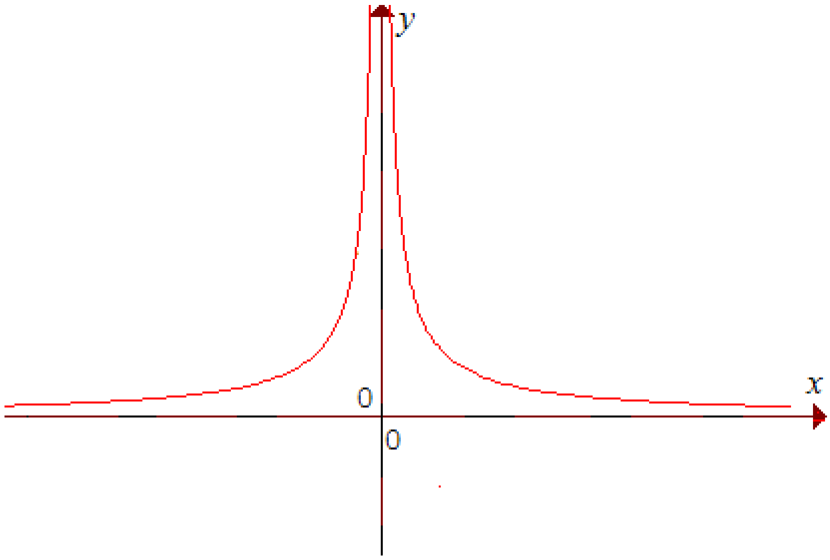
e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 1}{x - 3 + 2 \cdot \sqrt{9x^2 - 3}}$

8) Dados los siguientes gráficos, determinar los límites que se indican en cada caso:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



9) Límites laterales:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x$ g) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ j) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ k) $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1}$

l) $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1}$ m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ n) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

ñ) $\lim_{x\to 1^+} \log_2 (x-1)$ o) $\lim_{x\to 1^-} \log_2 (x-1)$ p) $\lim_{x\to 1^-} \log_{1/2} (x^2-1)$

q) $\lim_{x\to 1^+} \log_{1/2} (x^2-1)$ r) $\lim_{x\to +\infty} \log_2 \left(\frac{x-1}{2x^2+3}\right)$ s) $\lim_{x\to 0^-} \log_{1/3} \left(\frac{1}{2x^2+3}\right)$

t) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+2^{-1/x}}{1+3^{1/x}}$

10) Hallar los límites laterales (si existen) en los puntos indicados y graficar:

a) $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ en $x_1 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x \leq 1 \\ 2+x^2 & x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 1+x & x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = -1$ en $x_2 = 0$ en $x_3 = 1$

11) Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-5x-14}{2x-14}}$, se pide:

a) Indicar su dominio

b) Calcular $\lim_{x\to 7} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

12) Dada la función $f(x) = \log_3\left[\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}\right]$, se pide:

a) Indicar su dominio b) Graficarla

c) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

13) a) Graficar las funciones siguientes:

$$f : R \longrightarrow R \,/\, f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 3 & x \le -3 \\ x + 8 & x > -3 \end{cases}$$

$$g : R \longrightarrow R \,/\, g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & x < 2 \\ \log_2\left(x - \dfrac{3}{2}\right) & x \ge 2 \end{cases}$$

b) Completar y responder:

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots$ ¿Existe $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \ldots\ldots\ldots$ ¿Existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$?

14)

a) Sea $g : R - \{1\} \longrightarrow R \,/\, g(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1-x}} - 1 & si\ \ x < 1 \\ \log_{1/2}(x+1) + 5^{\frac{1}{1-x}} & si\ \ x > 1 \end{cases}$, se pide:

Calcular si existen $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Sea $h : R - \{3\} \longrightarrow R \,/\, h(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(x-3)}{x^2 - 9} + (3{,}12)^{\frac{1}{x^2-9}} & si\ \ x < 3 \\ \log_{1/2}\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & si\ \ x > 3 \end{cases}$, se pide:

Calcular si existen : $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

15) Para $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$ se pide: a) Determinar Dominio

b) Graficar

c) Calcular límites cuando x tiende a los valores prohibidos para el dominio

16) Determinar en cada caso el valor de **a** para que

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = -5$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = \infty$

17) Para los posibles valores de **a** y **b**, calcular:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^3+x^2}{bx^3+x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+1}{bx^3+x}$

18) Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Clasificar las discontinuidades y graficar las funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} -x+1 & -2<x<0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$ en $x_1=-1,\ x_2=0$ y $x_3=1$

b) $f(x)=\begin{cases} -1 & x<-1 \\ x^2 & -1<x<1 \\ x & x>1 \end{cases}$ en $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$ y $x_4=2$

c) $f(x)=\begin{cases} -x+1 & x<-1 \\ x^2+1 & -1<x<2 \\ x+3 & x>2 \end{cases}$ en $x_1=-1,\ x_2=0$ y $x_3=2$

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ en $x_1=0$ y $x_2=2$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $x_1=1$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ en $x_1=2$, $x_2=-2$ y $x_3=1$

En las siguientes no se indican puntos, **¿dónde habrá que analizar?**

g) $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 2 \\ 2 & x<2 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} 3+x & x\le 1 \\ 3-x & x>1 \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} 3 & x=2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x\ne 2 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} -4 & x<-2 \\ \dfrac{8}{x-2} & -2<x<6 \\ 2x-10 & x>6 \end{cases}$

19) Sabiendo que $f(-3)=7$ y $f(-1)=6$, se pide

$f(x)=\begin{cases} x^2+kx+t & x\ge -2 \\ kx+2t & x<-2 \end{cases}$

a) Determinar **k** y **t.**
b) Analizar continuidad.
c) Graficar.

20) Determinar en cada caso el valor de **a** para que f sea continua. Graficar.

a) $f:(a,+\infty)\to R \,/\, f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-1}{x-a} & x<8 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} & x\ge 8 \end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \,/\, f(x)=\begin{cases} \dfrac{15}{4} & si\ x=2 \\ \dfrac{ax^2+3x-18}{x^2-4} & si\ x\neq 2 \end{cases}$

c) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \,/\, f(x)=\begin{cases} \dfrac{15}{4} & si\ x=1 \\ \dfrac{x^3-1}{x-1}+\dfrac{a.\text{sen}(x-1)}{2x^2-2} & si\ x\neq 1 \end{cases}$

21) Determinar el valor de **a** para que f sea continua. Graficar.

$$f:(a,+\infty)\rightarrow R \,/\, f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x-1 & x>9 \\ \dfrac{ax-15}{x-a} & x\leq 9 \end{cases}$$

22) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan y clasificarlas.

a) $f(x)=\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

e) $f(x)=\dfrac{x-4}{(x+3).(x^2-16)}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-3x}$

g) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$

23) a) ¿Es posible redefinir $f(1)$ para que $f(x)=\dfrac{x.(x-1)}{x^2-1}$ sea continua en x = 1?

b) Definir, si es posible, $f(2)$ para que $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ sea continua en x = 2

c) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función g del ejercicio 14) a) en x = 1? Redefinir g de manera tal que resulte continua en x = 1.

24) Indicar en cada caso la fórmula y el gráfico de funciones que no sean continuas porque:

a) cumple 1 y no 2

b) cumple 2 y no 1

c) no cumple ni 1 ni 2

d) cumple 1 y 2 pero no 3

25) Dibujar en cada caso una función $f: R \to R$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

a) Presente una discontinuidad evitable en $x=-4$ y una discontinuidad esencial con salto finito en $x=3$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $f(0)=3$ y que presente una discontinuidad evitable en $x=2$.

c) $\underset{x\to-2^+}{lím}\ f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-6^x)$, $\underset{x\to+\infty}{lím}\dfrac{f(x)}{x}=1$, f(0) = -1, f(-2) =2, f presenta una discontinuidad esencial de salto finito en x=1 y una discontinuidad esencial de salto infinito en x=-2 , $C^+(f)=\{-2\}\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1,+\infty)$

26) Dar un ejemplo de una función de R en R que presente una discontinuidad esencial con salto finito en uno de sus puntos. Justificar la elección.

27) Hallar las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de cada una de las siguientes funciones

$$f_1(x)=\frac{x^2+1}{x+1} \qquad f_2(x)=\frac{1-x^3}{x} \qquad f_3(x)=\frac{x^3}{x^3-1}$$

$$f_4(x)=\frac{x^3}{1-x^2} \qquad f_5(x)=\frac{x^2-4}{x^2+3} \qquad f_6(x)=\frac{x^3+2}{x^2-4}$$

28) Dada $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$ y la tabla siguiente

a	b	c	A	B	C
0	1	- 2	1	0	- 1
1	0	- 9	0	1	-3
0	1	2	1	0	- 4
1	0	- 1	0	1	2

Investigar la existencia de asíntotas para los distintos valores de a, b, c, A, B y C.

29) Determinar dominio, asíntotas, analizar continuidad, graficar:

$$f(x) = \frac{-x^4 - x^3 + 7x^2 + 5x - 10}{x^2 - 5}$$

RESPUESTAS

1) a)0 ; $-\infty$; ; b) No existe; ∞ ; 0 ; c) 1 ; 1 ; 0 ; d) 0 ;0 ;1 ; e) 1 ; -1; 0

3) a) ½ b) 0 c) 1/3 d) ½ e) 1/3 f) 0 g) ∞ h) ∞ i) 1 j) ∞ k) ∞ l) 0 m) 0

n) ∞ o) ∞

4) a) ½ b) 2 c) ∞ d) 9/7 e) –2/5 f) 11/5 g) 5/8 h) 3/16 i) 0 j) 2a k) 4

5) a) 3 b) 5/2 c) ½ d) 4

6) a) $2\sqrt{2}$;b) -2 ;c) $-\frac{1}{3}$;d) $\frac{1}{2}$; e) 0 ; f) 0 ;g) 6 ; h) 1 ; i) 0 ; j) 2

7) a) 2/3 ; b) ∞ ;c) 0 ; d) 0 ; e) ∞ ; f) $\frac{5}{7}$

8) a) ∞ ; $-\infty$; 1 ; 1 ; b) ∞ ; ∞ ; 0 ; 0

9) a) 1 ; b) 1 ; c) 0 ; d) $+\infty$; e) $+\infty$;f) 0 ;g) $+\infty$; h) 0 ; i) 0 ; j) $+\infty$; k) $+\infty$; l) $-\infty$; m) 1 ; n) -1 ñ) $-\infty$; o)no existe; p)no existe; q) $+\infty$; r) $-\infty$; s) $-\infty$; t) 0

10) a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$; c) No existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

11) a) $Dom=[-2;\infty)-\{7\}$; b) $\underset{x\to 7}{lím}\, f(x)=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

12) a) $Dom=(-2;\infty)-\{1\}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

13) b) 5 ; 5 ; Si ; -1 ;-2 ; No existe

14) a) $\underset{x\to 1}{lím}\, g(x)=-1$ $\underset{x\to +\infty}{lím}\, g(x)=-\infty$ **b)** $\underset{x\to 3^-}{lim}\, h(x)=\frac{1}{6}$; $\underset{x\to 3^+}{lim}\, h(x)=-\infty$;

$\underset{x\to 3}{lim}\, h(x)$: no existe ; $\underset{x\to 4}{lim}\, h(x)=0$; $\underset{x\to +\infty}{lim}\, g(x)=+\infty$

15) a) $Dom = R - \{5;1\}$ c) $\lim_{x \to 5} f(x) = \frac{5}{2}$; $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

16) a) $a = 2$; b) $a = 3$

17) a) $\frac{a}{b}; \forall a \neq 0; \forall b \neq 0$; b) $0; \forall a \in R; \forall b \neq 0$

18)a) $x_1 = -1$ continua, $x_2 = 0$ discontinuidad esencial y $x_3 = 1$ continua

b) $x_1 = -1$ discontinuidad esencial, $x_2 = 0$ continua, $x_3 = 1$ discontinuidad evitable, $x_4 = 2$ continua

c) $x_1 = -1$ discontinuidad evitable, $x_2 = 0$ continua y $x_3 = 2$ evitable

d) $x_1 = 0$ discontinuidad esencial y $x_2 = 2$ continua

e) $x_1 = 1$ discontinuidad evitable

f) $x_1 = 2$ discontinuidad evitable, $x_2 = -2$ discontinuidad esencial y $x_3 = 1$ continua

g) no presenta discontinuidades

h) $x_1 = 1$ discontinuidad esencial

i) $x_1 = 2$ discontinuidad esencial

j) $x_1 = -2$ discontinuidad esencial, $x_2 = 2$ discontinuidad esencial y $x_3 = 6$ discontinuidad evitable

19)

a) $k = 3$; $t = 8$; b) esencial

20) **a)** $a = 2$ b) a = 3 c) a = 3

21) $a = 3$

22) a) $x_1 = 0$ discontinuidad evitable

b) $x_1 = 3$ discontinuidad evitable

c) $x_1 = 0$ discontinuidad esencial

d) $x_1 = 3$ discontinuidad evitable ; $x = -1$ discontinuidad esencial

e) $x_1 = -4$ discontinuidad esencial, $x_2 = -3$ discontinuidad esencial y $x_3 = 4$ discontinuidad evitable

f) $x_1 = -3$ discontinuidad evitable, $x_2 = 0$ discontinuidad esencial y $x_3 = 1$ discontinuidad esencial

g) $x_1 = 3$ discontinuidad esencial

23) a) $f(1) = \frac{1}{2}$ b) $f(2) = \frac{1}{4}$ c) g es discontinua evitable en x = 1

$$g: R \longrightarrow R \,/\;\; g(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1-x}} - 1 & si \;\; x < 1 \\ -1 & si \;\; x = 1 \\ \log_{1/2}(x+1) \;+ 5^{\frac{1}{1-x}} & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

27) $f_1 : A.V.: x = -1; A.O.: y = x - 1$
$f_2 : A.V.: x = 0$
$f_3 : A.V.: x = 1; A.H. y = 1$
$f_4 : A.V.: x = 1; x = -1; A.O. y = -x$
$f_5 : A.H.: y = 1$
$f_6 : A.V.: x = 2; x = -2; A.O.: y = x$

28) $f_1(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}; A.V.: x = 1; x = -1; A.H. y = 0$
$f_2(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-3}; A.V.: x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}; A.H.: y = 1$
$f_3(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}; A.V.: x = 2; A.H.: y = 0$
$f_4(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}; A.V.: x = -2; A.O.: y = x + 2$

29) $Dom = R - \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$; Discontinuidad evitable en $x = \sqrt{5}$ y en $x = -\sqrt{5}$; No tiene asíntotas.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

DERIVADAS

1) Encontrar, aplicando la definición de derivada, la función derivada de

$f_1(x) = 3x^2 + 2$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{x}$ con $x > 0$

$f_3(x)\ \dfrac{1}{x}$ con $x \neq 0$ $\qquad$ $f_4(x) = x^3$

2) Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar los que son falsos:

a) Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en este punto
b) Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él.

3) ¿Es derivable la función

$f_1(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 7 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en el punto x=0?

$f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 5 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + 2x^2 + 2x + 5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en el punto x=0?

$f_3(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el punto x=-1? ¿y en x=1? Graficar.

4) ¿Es derivable la función $f(x) = |x|$ en x = 0? ¿Es continua en todo el dominio? Explicar porqué.

5) a) ¿Qué tipo de función es la función derivada de una función lineal?
b) ¿Qué tipo de función es la función derivada de una función cuadrática?

REGLAS DE DERIVACIÓN

6) Utilizando las reglas de derivación, obtener la función derivada de:

$f_1(x) = x^4 + x^6 + x$

$f_2(x) = 5.e^x$

$f_3(x) = \frac{1}{3}\ln x$

$f_4(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

$f_5(x) = e^x - \text{sen}x$

$f_6(x) = \frac{x+2}{x}$

$f_7(x) = x.e^x$

$f_8(x) = \pi + \pi x^{-1} - \pi x^{-2}$

$f_9(x) = (3x+2)\text{sen}x$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA (REGLA DE LA CADENA)

7) Derivar las siguientes funciones compuestas:

$f_1(x) = \text{sen}(3x)$

$f_2(x) = \cos^2(\ln x)$

$f_3(x) = \sqrt{1-2x}$

$f_4(x) = (x^2+4)^5$

$f_5(x) = \left(\frac{1+e^x}{1-e^{-x}}\right)^4$

$f_6(x) = \sqrt[3]{4\cos(x^2)}$

$f_7(x) = \text{sen}^3 x + \cos^3 x$

$f_8(x) = \cos(x^2-1)$

$f_9(x) = \sqrt{1-x}$

$f_{10}(x) = e^{\sqrt{x}}$

$f_{11}(x) = e^{x^2-3x}$

$f_{12}(x) = 5.6^x$

$f_{13}(x) = \ln(5x-3) - \sqrt{1-x}\cdot sen(x)$

$f_{14}(x) = e^{-4x^3-5} - \ln(1-2x^2)\cdot\cos^3(x)$

RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL

8) Determinar la recta tangente y la recta normal a cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 2x$, en $x_0 = -1$

b) $f(x) = x^3 - 4x$, en $x_0 = 1$

c) $f(x) = e^{-x}$, en $x_0 = 0$

d) $f(x) = 5x^2 - 3x$, en $x_0 = -1$

9) De una función real se sabe que su función derivada es $f': R \to R / f'(x) = x^2 - 3x + 4$. Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva que representa f en los puntos de abscisa 1 y –2.

10) Las pendientes de dos tangentes a una parábola son $f'(3) = 2$ y $f'(5) = -3$

a) A cuál de los siguientes intervalos pertenece x_v?

$(-\infty; 3)$ $\quad$ $(3; 5)$ $\quad$ $(5; +\infty)$

b) ¿Puede hallar x_v? ¿Cuál es?

11) El vértice de una parábola es (-3;2). La pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa 2 es –3. ¿En qué punto de la parábola, la pendiente de la recta tangente a ella es –2?. Halle la ecuación de dicha recta

12) Indique en qué punto o puntos del gráfico de $f(x) = x^3 - 6x + 5$, la recta tangente es horizontal.

13) Indique en qué punto o puntos del gráfico de $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 7x + 17$ la recta tangente forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de las abscisas.

14) Demuestre que la recta de ecuación $y = -x$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halle el punto de tangencia.

15) ¿Cuál es la ecuación de la recta normal a $f(x) = \frac{1}{x^3}$ en el punto (1; 1)?

16) ¿En qué punto del gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ la tangente al mismo corta al eje x en $x=3$?

17) Determine el valor de “a”, tal que los puntos sobre la parábola $y=x^2$ de abscisas “a” y “-a” tengan tangentes perpendiculares entre si. Dar la ecuación de cada recta. Grafique la parábola y las rectas tangentes

18) Sea $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{7x^2}{2}+14x-7$.¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 2?. Escribir la función de cada recta.

19) La función $f(x)=x^3-3x^2+x$ en el punto (2;-2) tiene por recta tangente una recta tal que corta a f(x) en otro punto. Determinar las coordenadas de dicho punto.

20) Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x)=(x+1)\cdot\ln(2x-1)$ en el punto de abscisa $x=1$.

21) Determinar en que punto o puntos de $f(x)=2-\sqrt[5]{x-3}$ la recta tangente es vertical.

22) Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$ en :

a) $x=-1$; b) $x=0$.

23) Determinar **a** y **b** sabiendo que la recta tangente al gráfico de $f(x)=a\cdot\operatorname{sen} x - b\cdot\cos x$ en el punto (0;5) es $y=2x+5$.

24) En qué punto la recta tangente al gráfico de $f(x)=4+3\cdot\ln(x^2)$ es $y=6x-2$.

25) Dada $f(x)=x^3+2x^2-k$. Determinar el valor real de **k** para el cual la recta tangente al gráfico en el punto de abscisa $x_0=1$ pase por el punto $P=(0;-6)$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

26) Mostrar en qué subconjuntos del dominio, las siguientes funciones son estrictamente crecientes. Determinar puntos críticos:

a) $f(x)=x^3+3x+5$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x}.(x-3)^2$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-12x}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ f) $f(x)=x\cdot\sqrt{3-x^2}$

27) Hallar los extremos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3}{1-x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^3-2x^2$ d) $f(x)=\ln(1+x^2)$

28) Encontrar los ceros de f. Graficar f ' y f ''y determinar a partir de estos gráfico crecimiento, decrecimiento y concavidad de f. ¿Dónde están los puntos máximos, mínimos y de inflexión?

a) $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-2x$; b) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2$; c) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+\dfrac{11}{3}$

29) a) Para las siguientes funciones, se pide estudiar: dominio; intersección con los ejes; intervalos de positividad y negatividad; intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

b)Para las funciones f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 y f_7 analizar concavidad y puntos de inflexión; asíntotas. Hacer para cada una un gráfico aproximado.

$f_1(x)=6x^2-x^4$ $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

$f_3(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$ $f_4(x)=-3x^5+5x^3$

$f_5(x)=3x^4-4x^3$ $f_6(x)=x^4-12x^3+48x^2-64$

$f_7(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $f_8(x)=x\,e^{-x}$

$f_9(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-3}$ $f_{10}(x)=e^{-x^2}$

$f_{11}(x)=x^2\cdot e^{-\frac{2}{5}x}$ $f_{12}(x)=(1+x^2)\cdot e^{-x^2}$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

30) a) Entre todos los rectángulos de área 16, encontrar el que tiene perímetro mínimo.

b) Entre todos los rectángulos de área 50, encontrar al que diagonal mas corta.

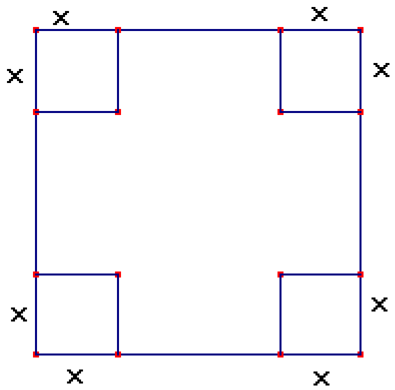
c) Con 12 metros de alambre se construyen rectángulos. Hallar las dimensiones del que tiene área máxima.

d) Con 100 m^2 de baldosas se quiere cubrir una superficie rectangular. Hallar las dimensiones de la que tiene mínimo perímetro.

e) Dividir al número 100 en dos partes cuya suma de cubos sea mínima.

f) Encontrar un número real x, tal que la suma del número y el inverso de su cuadrado, tenga un valor mínimo.

g) Se tiene una cartulina cuadrada de 4dm de lado, y se quiere hacer una caja recortando cuadraditos de los extremos, para luego levantar las aletas. ¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadrado que se quiere recortar (en la figura x) para que el volumen de la caja resulte máximo?



h) Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm., ¿cuál es el de área máxima?

i) Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

RESPUESTAS:

2) a) F b) V

3) f_1 No f_2 Sí f_3 No

4) No. Sí

5) a) Constante b) Lineal

6) $f_1'(x) = 4x^3 + 6x^5 + 1$ $f_2'(x) = 5e^x$

$f_3'(x) = \frac{1}{3x}$ $f_4'(x) = \frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}$

$f_5'(x) = e^x - \cos x$ $f_6'(x) = -\frac{2}{x^2}$

$f_7'(x) = e^x(x+1)$ $f_8'(x) = -\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x^3}$

$f_9'(x) = 3 \cdot sen(x) + (3x+2) \cdot \cos(x)$

7) $f_1'(x) = 3\cos(3x)$ $f_2'(x) = \frac{2\cos(\ln x).[-sen(\ln x)]}{x}$

$f_3'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ $f_4'(x) = 10x(x^2+4)^4$

$f_5'(x) = 4\left(\frac{1+e^x}{1-e^{-x}}\right)^3 \frac{e^x - e^{-x} - 2}{(1-e^{-x})^2}$ $f_6'(x) = -\frac{8}{3}\frac{x.sen(x^2)}{\sqrt[3]{16\cos^2(x^2)}}$

$f_7'(x) = 3.senx\cos x(senx - \cos x)$ $f_8'(x) = -2x.sen(x^2-1)$

$f_9'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ $f_{10}'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

$f_{11}'(x) = e^{x^2-3x}(2x-3)$ $f_{12}'(x) = 5.\ln 6.6^x$

$f_{13}'(x) = \frac{5}{5x-3} + \frac{sen(x)}{2\cdot\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}\cdot\cos(x)$

$f_{14}'(x) = -12x^2 \cdot e^{-4x^3-5} + \frac{4x}{1-2x^2}\cdot\cos^3(x) + \ln(1-2x^2)\cdot 3\cos^2(x)\cdot(-sen(x))$

8) a) $y_T = -4x - 1$, $y_N = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$, $P = (-1;3)$

b) $y_T = -x - 2$, $y_N = x - 4$, $P = (1;-3)$

c) $y_T = -x + 1$, $y_N = x + 1$, $P = (0;1)$

d) $y_T = -13x - 5$, $y_N = \frac{1}{13}x + \frac{105}{13}$, $P = (-1;8)$

9) 2 y 14

10) a) $(3;5)$ b) $x_V = \frac{19}{5}$

11) $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ $y = -2x - \frac{2}{3}$

12) $P_1\left(\sqrt{2}, -4\sqrt{2} + 5\right)$ $P_2\left(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2} + 5\right)$

13) $P = (2;7)$

14) $P = (3;-3)$

15) $y_N = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

16) $P = \left(2, \frac{1}{4}\right)$

17) $a = \frac{1}{2}$ $y = x - \frac{1}{4}$ $y = -x - \frac{1}{4}$

18) $P_1 = \left(-4, -\frac{85}{3}\right)$ $y_1 = 2x - \frac{61}{3}$

$P_2 = \left(-3, -\frac{53}{2}\right)$ $y_2 = 2x - \frac{41}{2}$

19) $P = (-1;-5)$

20) 3) $y_T = 4x + 4$; $y_N = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

21) $P=(3;2)$

22) a) $y_T=\dfrac{1}{e}$ Normal: $x=-1$; b) $y_T=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ $y_N=-4x+\dfrac{1}{2}$

23) $a=2$, $b=-5$

24) $P=(1;4)$

25) $k=2$

26) a) R ; b) $\left(-\infty,-\dfrac{3}{7}\right)\cup(3,+\infty)$; c) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; d) R-{1} ;

e) $(-\infty,3)$ f) $\left(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{3}\right)$.

Puntos Críticos: a) No tiene; b) $x=0; x=3; x=\dfrac{3}{7}$;

c) $x=0; x=2\sqrt{3}; x=2; x=-2$;d) No tiene; e)No tiene ; f) $A=\left(-\sqrt{3};0\right)$;

$B=\left(\sqrt{3};0\right)$; $C=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2};\dfrac{3}{2}\right)$; $D=\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$

27) a) Mínimo en $P=(0;3)$; b) No hay extremos relativos ; c) Máximo $P=(0;0)$

Mínimo en $Q=\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{32}{27}\right)$; d) Mínimo en $P=(0;0)$

28) a) $C^0=\left\{0,2\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right\}$; Máximo$\left(-2;\dfrac{8}{3}\right)$;Mínimo$\left(2;-\dfrac{8}{3}\right)$;Punto de inflexión$(0;0)$

b) $C^0=\left\{0,\dfrac{9}{2}\right\}$; Máximo$\left(3;\dfrac{9}{2}\right)$; Mínimo$(0;0)$; Punto de inflexión$\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$

c) $C^0=\left\{-1,-1+2\sqrt{3},-1-2\sqrt{3}\right\}$; Máximo$\left(1;\dfrac{16}{3}\right)$; Mínimo$\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$;

Punto de inflexión$(-1;0)$

29) 1) Máximos $A=\left(-\sqrt{3};\ f\left(-\sqrt{3}\right)\right)$ $B=\left(\sqrt{3};\ f\left(\sqrt{3}\right)\right)$; Mínimo $P=(0;0)$

Crece : $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$ Decrece : $\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$;

Puntos de inflexión $C=(1;5)$; $D=(-1;5)$

Cóncava hacia abajo: $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; Cóncava hacia arriba $(-1;1)$

2) $Dom=R-\{-1;1\}$; Máximo $(0;-1)$;Crece $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$; Decrece $(0;1)\cup(-1;0)$; A. V : $x=1$ $x=-1$; A. H. $y=0$. No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo : $(-1;1)$ Cóncava hacia arriba : $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$

3) $Dom=R-\{2;-2\}$; Máximo en $x=-2\sqrt{3}$; Mínimo en $x=2\sqrt{3}$;

Crece $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};\infty\right)$; Decrece $\left(-2\sqrt{3};-2\right)\cup(-2;2)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right)$

Punto de Inflexión $P = (0;0)$
Cóncava hacia arriba $(-2;0) \cup (2;\infty)$; Cóncava hacia abajo : $(-\infty;-2) \cup (0;2)$
$A.V.: x = 2; x = -2; A.O.: y = 2x$

4) $Dom = R$; Máximo: $A = (1;2)$; Mínimo: $B = (-1;-2)$; Crece: $(-1;1)$
Decrece: $(-\infty;-1) \cup (2;\infty)$

5) $Dom = R$; Mínimo: $B = (1;-1)$; Crece: $(1;\infty)$Decrece: $(-\infty;1)$

6) $Dom = R$; Mínimos: $A = (0;-64)$;; Crece: $(0;\infty)$;Decrece: $(-\infty;0)$; Cóncava hacia arriba en todo su dominio

7) $Dom = R$; $A.H. y = 0$; Máximo $P = \left(1;\frac{1}{2}\right)$; Mínimo $Q = \left(-1;-\frac{1}{2}\right)$
Crece: $(-1;1)$; Decrece $(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$
Puntos de inflexión $A = (0;0)$; $B = \left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $C = \left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
Cóncava hacia arriba : $\left(-\sqrt{3};0\right) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$;
Cóncava hacia arriba : $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\sqrt{3}\right)$

8) $Dom = R$; Máximo: $P = \left(1;\frac{1}{e}\right)$; Crece $(-\infty;1)$ Decrece $(1;\infty)$
Punto de Inflexión : $Q = \left(2;\frac{2}{e^2}\right)$; Cóncava hacia arriba : $(2;\infty)$; Cóncava hacia abajo : $(-\infty;2)$

9) $Dom = \mathbb{R} - \{3\}$; asíntotas: AV x = 3, AO y = x - 1 Mínimo relativo $P = (4;4)$
Máximo relativo (2;0); Crece $(-\infty;-2) \cup (4;+\infty)$; Decrece : $(2;3) \cup (3;4)$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty;3)$ Cóncava hacia arriba: $(3;+\infty)$

10) $Dom = R$; Máximo $P = (0;1)$; Crece : $(-\infty;0)$; Decrece : $(0;\infty)$
; Puntos de inflexión : $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ $B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};e^{-\frac{1}{2}}\right)$
Cóncava hacia arriba $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\infty\right)$; Cóncava hacia abajo : $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11) $Dom = R$; Mínimo: $A = (0;0)$; Máximo : $B = \left(5;25 \cdot e^{-2}\right)$; Crece : $(0;5)$;
Decrece : $(-\infty;0) \cup (5;\infty)$; Puntos de inflexión en $x_1 = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_2 = 5 - \frac{\sqrt{2}}{2}$;
Cóncava hacia arriba : $\left(-\infty;5-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(5+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; Cóncava hacia abajo :
$\left(5-\frac{\sqrt{2}}{2};5+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

12) $Dom = R$; Máximo : $A = (0;1)$; Crece: $(-\infty;0)$; Decrece : $(0;\infty)$; Puntos de inflexión : $P = \left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ $Q = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$;

Cóncava hacia arriba: $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\infty\right)$;Cóncava hacia abajo: $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

30) a) Cuadrado de lado igual a 4 ;b) $5\cdot\sqrt{2}$; c) Cuadrado de 1,5 metros ;
d) Cuadrado de 10 metros de lado ; e) 50 y 50 ; f) $\sqrt[3]{2}$; g) $x=\frac{2}{3}dm$

h) Equilátero con lados de 10 cm i) $y = 5x-3$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4

INTEGRALES

Dada una función f(x), diremos que otra, F(x) es primitiva de f(x) cuando F'(x) = f(x)

F(x) es primitiva de f(x) $\Leftrightarrow$ F'(x) = f(x)

<u>Ejemplo:</u> $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una primitiva de $f(x) = x^3$ porque F'(x) = f(x)

Observar que $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$ también es una primitiva de f ¿por qué?

¿cuántas primitivas tiene f? ¿por qué?

La operación que permite calcular la función primitiva recibe el nombre de **Integración**.

Así como cuando vemos el símbolo "+" o " - " entendemos que debemos efectuar la operación suma o la operación resta, la operación integrar también tiene su símbolo y este es $\int$ que se interpreta como " buscar la primitiva de ".

Propiedades de la integración

a) $\int f + g = \int f + \int g$ b) $\int k.f = k.\int f$

Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Tabla de Primitivas

f(x)	F(x)
1	x+C
k	k.x+C
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
sen x	- cos x+C
cos x	sen x+C

1) Calcular las siguientes primitivas:

a) $\int 8x^3 dx$ b) $\int (x^3 + 2x^5 - x)dx$ c) $\int \sqrt{x}\ dx$

d) $\int \sqrt[3]{x}\ dx$ e) $\int 2x.(5x-3)\ dx$ f) $\int \frac{5}{x}\ dx$

g) $\int 6x^{-7} dx$ h) $\int \frac{-7}{x^2} dx$ i) $\int \frac{12}{7x^4} dx$

j) $\int (6.e^x - 9x + 4)\ dx$ k) $\int (\operatorname{sen} x + 3x)\ dx$ l) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} \right)\ dx$

m) $\int (5\cos x - 6x^5)\ dx$ n) $\int (x^2 + 2x)^2\ dx$ o) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x^2 \right)^2\ dx$

p) $\int \frac{x^2 - x - 3}{\sqrt{x}}\ dx$ q) $\int x.(1 - \sqrt{x})\ dx$ r) $\int (\sqrt[3]{x} - x).(x^2 - \sqrt{x})\ dx$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

2) Calcular las siguientes primitivas:

a) $\int \operatorname{sen}(x).\cos(x)\ dx$ b) $\int x^4.e^{x^5} dx$ c) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx$

d) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^5(x)} dx$ e) $\int x.\operatorname{sen}(x^2)\ dx$ f) $\int \frac{(x+1)}{x^2 + 2x - 3} dx$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$ h) $\int \frac{1}{x-1} dx$ i) $\int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$

j) $\int \sqrt{x^2 - 2x}\,(x-1)dx$ k) $\int \frac{x}{(x+3)^5} dx$ l) $\int \frac{\cos(4x)}{\operatorname{sen}^2(4x)} dx =$

INTEGRACIÓN POR PARTES

3) Calcular las siguientes primitivas:

a) $\int x.e^{x}\ dx$ b) $\int x.\cos(x)\ dx$ c) $\int x.\text{sen}(x)\ dx$

d) $\int x^{2}.\cos(x)\ dx$ e) $\int x^{3}.\text{sen}(x)\ dx$ f) $\int x^{2}.e^{x}\ dx$

g) $\int x.\ln(x)\ dx$ h) $\int \ln(x)\ dx$ i) $\int e^{x}.\text{sen}(x)\ dx$

j) $\int e^{x}.\cos(x)\ dx$ k) $\int x^{2}.e^{3x}\ dx$ l) $\int \left(5 - x^{2} \cdot \ln x\right) dx =$

4) Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{0}^{2} x\ dx$ b) $\int_{1}^{4} 3x^{2}\ dx$ c) $\int_{0}^{2\pi} senx\ dx$ d) $\int_{-1}^{3} e^{x}\ dx$ e) $\int_{-2}^{1} 2x - 3\ dx$

5) Calcular el área determinada por cada una de las siguientes curvas con el eje de las abscisas y los límites dados en cada caso, graficar esquemáticamente cada situación.

a) $f(x) = 2x + 6$ para $a = 4$ y $b = 6$ **b)** $f(x) = x^{2} + 1$ para $a = 0$ y $b = 2$

c) $f(x) = x^{3}$ para $a = 1$ y $b = 2$ **d)** $f(x) = 3 + 2x - x^{2}$ con el eje de las “x”

e) $f(x) = x^{2} - 6x$ con el eje de las “x” **f)** $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x^{2}}$ para $a = 1$ y $b = 2$

g) $f(x) = (x^{2} - 1).(x - 3)$ con el eje de las “x”

6) Graficar y calcular el área de la región limitada por:

a) $f(x) = 4x - x^{2}$ y $g(x) = 2x$

b) $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^{3}$

c) $f(x) = x^{2} + 2$ y $g(x) = 4$

d) $f(x) = 5x + 1$; $g(x) = -x + 7$; el eje x

e) $f(x) = \sqrt{2x}$ $g(x) = 4$ $x = 0$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=9x$; $x=3$

g) $f(x)=e^{x}$, $g(x)=e^{-x}$, $x=1$, $x=-1$

h) $f(x)=x^2$ $g(x)=2x$ $h(x)=\dfrac{x^2}{2}$

i) $f(x)=x+1$ $g(x)=x-1$ $h(x)=-x+3$ eje x

j) $f(x)=3\cdot senx$, $g(x)=3\cdot\cos x$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$

k) $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x)=x^2$

7) Determinar la primitiva $F(x)$ de $f(x)=x\cdot e^{5x}$, que verifique $F\left(\dfrac{1}{5}\right)=-4$.

8) Sabiendo que $\int_0^3 [2\cdot f(x)+1]dx=11$, obtener $\int_0^3 f(x)dx$.

9) Sea $F(x)=\int_{-4}^{x^2}(t-4)dt$ se pide hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos extremos de F(x).

RESPUESTAS

1) a) $2x^4 + k$ b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2 + k$ c) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$

d) $\frac{3}{4}x\ \sqrt[3]{x} + k$ e) $\frac{10}{3}x^3 - 3x^2 + k$ f) $5.\ln x + k$

g) $-\frac{1}{x^6} + k$ h) $\frac{7}{x} + k$ i) $-\frac{4}{7x^3} + k$

j) $6e^x - \frac{9}{2}x^2 + 4x + k$ k) $-\cos x + \frac{3}{2}x^2 + k$

l) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + k$ m) $5.\mathrm{sen}x - x^6 + k$

n) $\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{4}{3}x^3 + k$ o) $3\ \sqrt[3]{x} - \frac{6}{7}\ x^2\ \sqrt[3]{x} + \frac{1}{5}x^5 + k$

p) $\sqrt{x}\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{3}x - 6\right) + k$ q) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + k$

r) $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{10}x^3\ \sqrt[3]{x}\ \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{6}{11}x\ \sqrt[6]{x^5} + k$

2) a) $\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x + k$ b) $\frac{1}{5}e^{x^5} + k$ c) $-\ln(\cos x) + k$

d) $-\frac{1}{4\mathrm{sen}^4 x} + k$ e) $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + k$ f) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 2x - 3\right| + k$

g) $\sqrt{x^2 + 5} + k$ h) $\ln|x - 1| + k$ i) $\frac{1}{3}(1 + \ln x)^3 + k$

j) $\frac{1}{3}(x^2 - 2x)\ \sqrt[3]{x^2 - 2x} + k$ k) $\frac{1}{(x+3)^4}\left[-\frac{1}{3}(x+3) + \frac{3}{4}\right] + k$

l) $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{sen(4x)} + k$

3) a) $e^x(x - 1) + k$ b) $x.\mathrm{sen}x + \cos x + k$ c) $-x.\cos x + \mathrm{sen}x + k$

d) $x^2.\mathrm{sen}x + 2x\cos x - 2\mathrm{sen}x + k$ e) $\cos x(-x^3 + 6x) + \mathrm{sen}x(3x^2 - 6) + k$

f) $e^{x}(x^{2}-2x+2)+k$ g) $\frac{1}{4}x^{2}(2\ln x-1)+k$ h) $x(\ln x-1)+k$

i) $\frac{1}{2}e^{x}(\text{sen}x-\cos x)+k$ j) $\frac{1}{2}e^{x}(\text{sen}x+\cos x)+k$

k) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^{2}-6x+2)+k$ l) $5x-\frac{x^{3}}{3}\cdot\ln x+\frac{1}{9}x^{3}+k$

4) a) 2 b) 63 c) 4 d) $e^{3}-e^{-1}$ e) -12

5) a) 32 b) $\frac{14}{3}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{32}{3}$ e) 36 f) 3 g) 17

6) a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$; d) $A=\frac{108}{5}$; e) $A=32\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

f) $A=40-2\cdot\ln 3$; g) $A=2\cdot e+\frac{2}{e}-4$; h) $A=4$; i) A=3 ; j) $A=6\cdot\sqrt{2}-6$

k) $A=\frac{37}{12}$

7) $F(x)=\frac{1}{5}\cdot e^{5x}\cdot(x-1)-\frac{96}{25}$

8) 4

9) Crece: $(-2\sqrt{2};0)\cup(2\sqrt{2};\infty)$ Decrece: $(-\infty;-2\sqrt{2})\cup(0;2\sqrt{2})$

Máximo: A=$(0;-24)$ Mínimos: B=$(-2\sqrt{2};-40)$ C=$(2\sqrt{2};-40)$