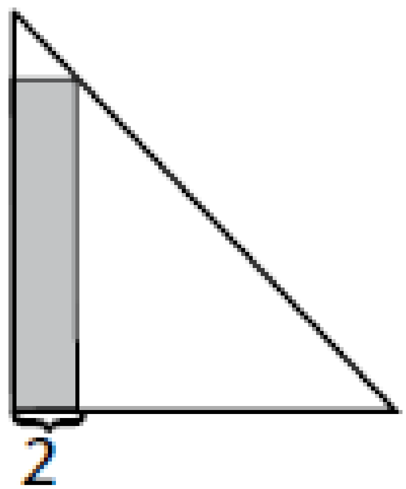
TRABAJO PRÁCTICO 2[1]

Problema 1

En un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 11 cm se inscriben rectángulos, de manera que uno de sus vértices coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y que sus otros tres vértices estén en diferentes lados del triángulo.



a) ¿Cuál es el área del rectángulo de base dos? (es el rectángulo que está dibujado)

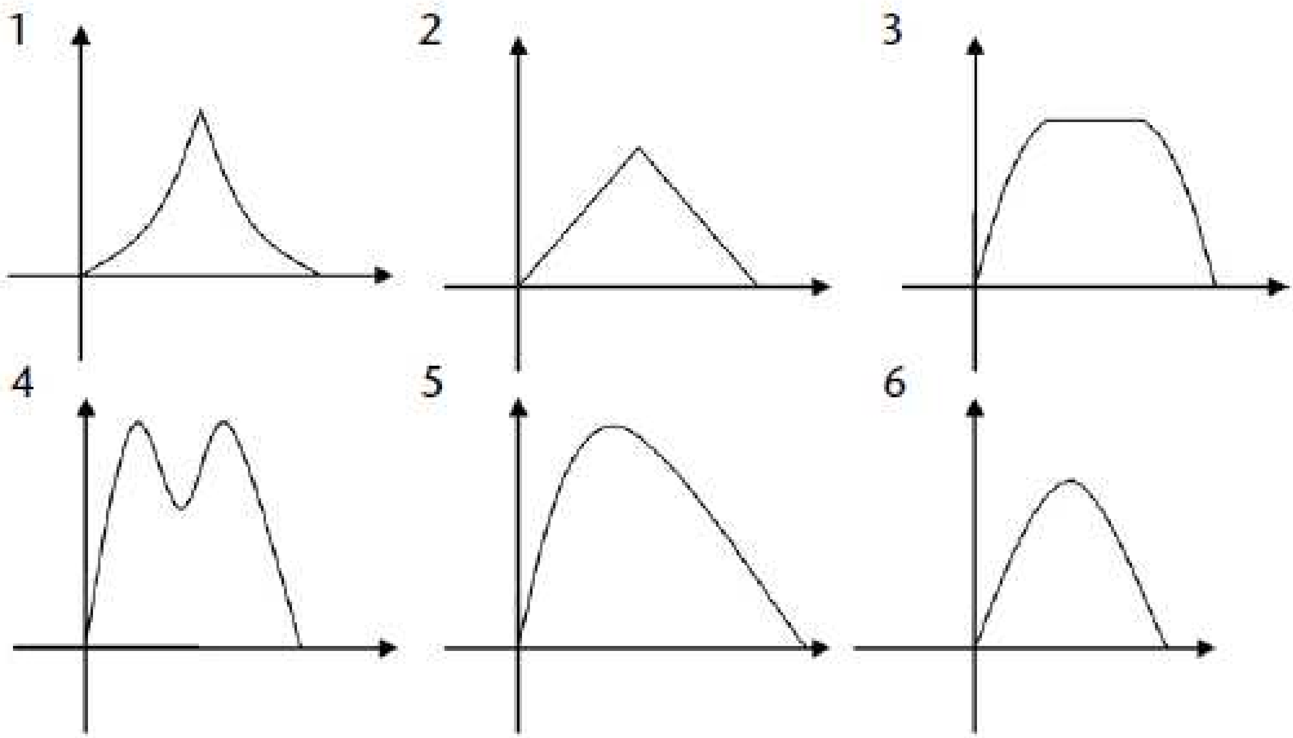
b) ¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área mayor que el que está dibujado? Si es posible encontrar alguno, indicar el valor de la base.

c) ¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área menor que el de base dos? Si es posible encontrar alguno, indicar el valor de la base.

d) ¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área igual que el de base 2? Si es posible encontrar alguno, indicar el valor de la base.

e) Para cada uno de los siguientes 6 gráficos, decidir si puede corresponder o no a la representación gráfica de la variación del área del rectángulo en función de la base del mismo. En cada caso, dar argumentos para justificar la respuesta.

[1] La secuencia de problemas corresponden al documento "Funcion cuadratica, parabola y ecuaciones de segundo grado". Aportes para la enseñanza Nivel Medio. GCBA



Problema 2

Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un micro emprendimiento como técnicos de computadoras.

Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula:

$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$ *que permite calcular la ganancia semanal en función del precio por hora.*

a) *Miguel propone cobrar $ 56 por hora ¿cuánto ganarían en ese caso?*

b) *Ernesto quiere aumentar la ganancia semanal ¿a qué precio podrían cobrar la hora?*

c) *¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia semanal de $2048?*

d) *¿Es posible obtener una ganancia semanal de $1400? ¿y de 3500?*

e) *¿Cuál es la máxima ganancia semanal que se puede obtener? ¿Qué precio por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia?*

f) *En la pregunta c) se analizó que existen dos valores de precios por hora en los cuales la ganancia que se obtiene es de $2048, ¿cuál de los dos precios elegirían para obtener esa ganancia?*

Y si la fórmula de la ganancia fuera $G(p) = 4000 - 3(p - 170)^2$

a) *¿Pueden dar dos valores de p que den la misma ganancia?*

b) ¿Cuál sería la máxima ganancia y para qué precio?

Problema 3:

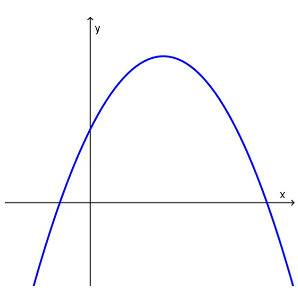
Los registros de temperatura tomados un día del mes de julio entre las 0hs y las 15hs en una zona rural se ajustan a la función: $T(x) = 0{,}1(x-8)^2 - 4$ *, donde T es la temperatura en grados Celsius y x la hora del día.*

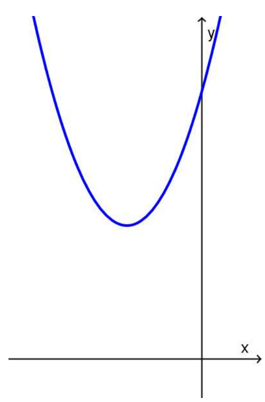
a) ¿Qué temperatura hubo a las 2 de la mañana?
b) ¿En algún momento de la mañana se registró la misma temperatura que a las 15 hs?
c) ¿En algún momento del día se registró la misma temperatura que a las 0 horas?
d) ¿Es posible haber registrado antes de las 15 horas una temperatura de -1,5°C? ¿y de -5°C?
e) ¿Cuál fue la temperatura mínima entre las 0 y las 15 horas y a qué hora se registró?

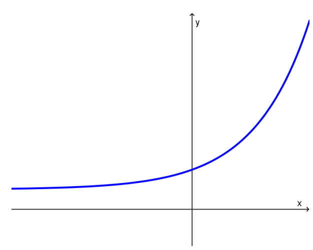
Problema 4

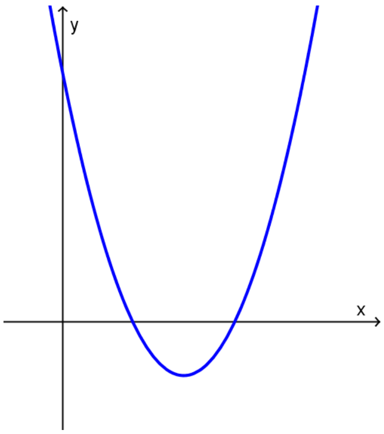
Dada la siguiente función $f(x) = (x-2)^2 + 4$

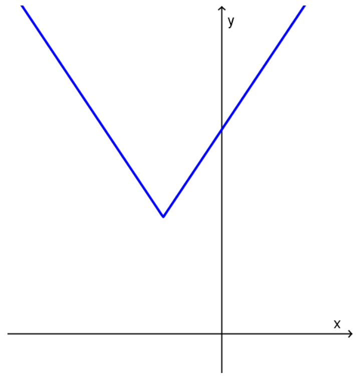
a) Busque, si existen, otros valores de dominio que tengan la misma imagen que $x = 5$. ¿Cuántos hay?
b) Busque, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = -3$. ¿Cuántos hay?
c) Busque, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que $x = 2$. ¿Cuántos hay?
d) Proponga, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 20. ¿Cuántos hay?
e) Proponga, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 3. ¿Cuántos hay?
f) Proponga, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 4. ¿Cuántos hay?
g) Analice cuáles de los siguientes gráficos podría corresponder con la función analizada.

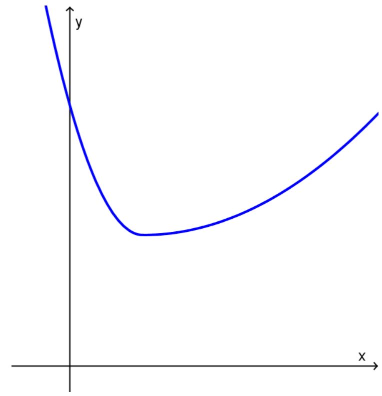


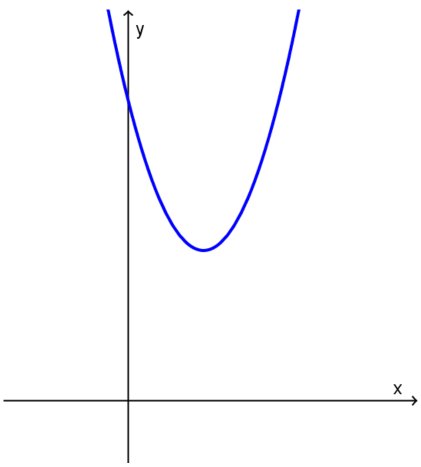


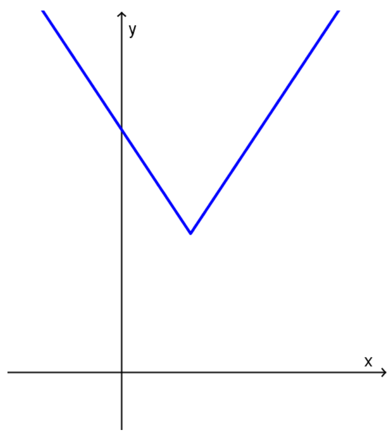












Problema 5

Dadas las siguientes funciones, hallar el máximo o el mínimo valor que puede alcanzar cada una de las funciones y en qué valor de x lo alcanza.

a) $f(x) = (x + 5)^2 - 4$

b) $g(x) = -2(x - 5)^2 + 1$

c) $h(x) = 5 - (4x+3)^2$

d) $i(x) = (7x - 5)^2 + 18$

Problema 6

Dada la función $f(x) = (x + 3)^2 - 9$

a) *Decidir, en cada caso, si es cierta la afirmación:*

   i) *Hay dos valores de x tales que* $f(x) = 160$

   ii) *Hay dos valores de x tal que* $f(x) = 5$

iii) Hay dos valores de x tal que f(x) = - 20

b) *Para cada una de las siguientes frases, completarlas con un número para que resulten verdaderas:*

i) Hay un único valor de x tal que f(x) =……..

ii) No hay valor de x tal que *f(x)* =…………

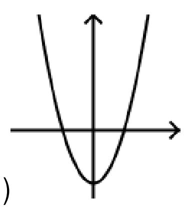
iii) Hay tres valores de x tales que *f(x)* =……

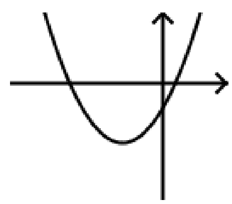
c) *Hacer un gráfico aproximado de la función f.*

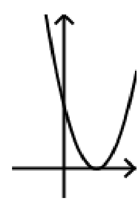
Problema 7

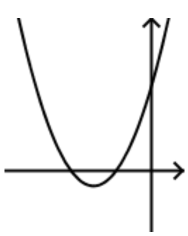
Dadas las siguientes fórmulas y gráficos de funciones, relacionar las fórmulas con los gráficos.

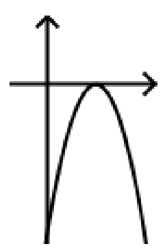
$f(x) = (x-2)^2$ $g(x) = (x+5)^2 - 4$ $h(x) = -(x-3)^2 + 4$ $t(x) = 2\,(x+5)^2 + 2$ $k(x) = 4 - (2x-1)^2$

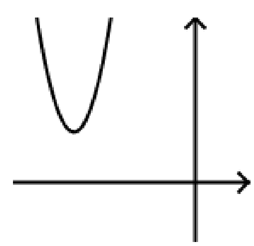
1) 

2) 

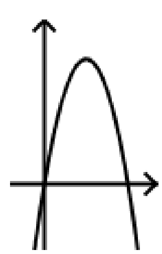
3) 

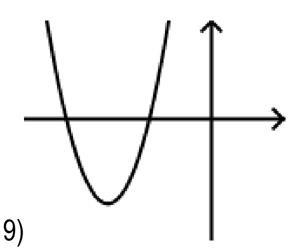
4) 

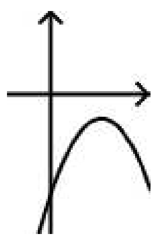
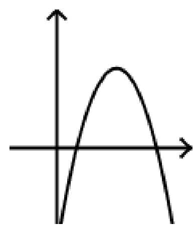
5) 

6) 

7) 

8) 

9) 

10)  11) 

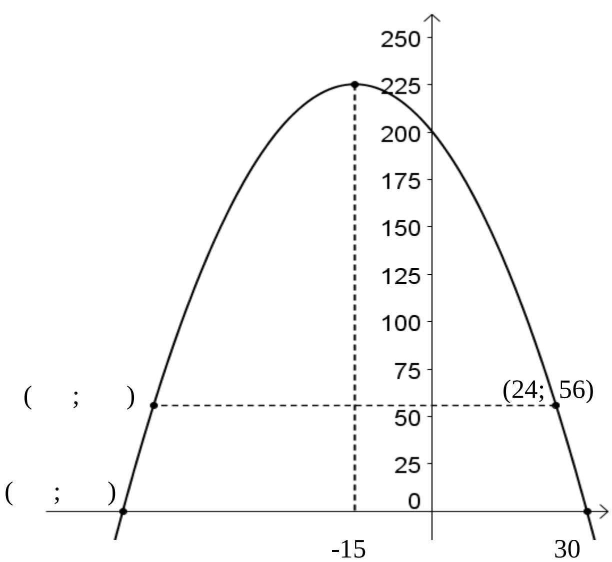
Problema 8

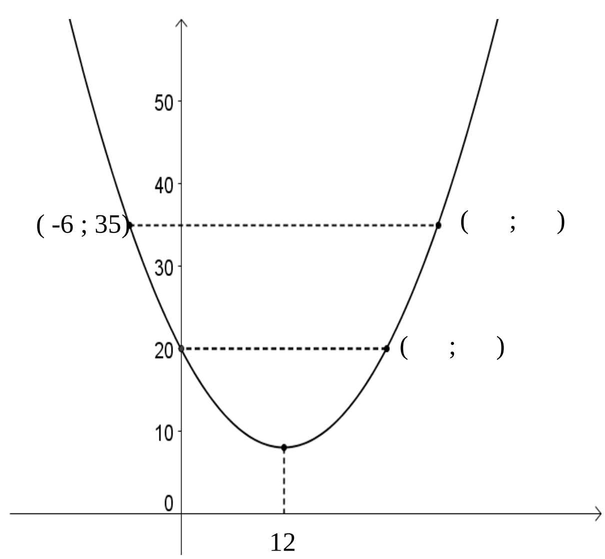
Dada la siguiente función $y = (x-3)^2 - 5$

a. *Busquen, si existe, otro valor del dominio que tenga la misma imagen que* $x = 0$ *¿Cuántos hay? ¿Por qué?*
b. *Busquen, si existe, otro valor del dominio que tenga la misma imagen que* $x = -1$ *¿Cuántos hay? ¿Por qué?*
c. *Busquen, si existe, otro valor del dominio que tenga la misma imagen que* $x = 1$ *¿Cuántos hay? ¿Por qué?*

Problema 9

Para las siguientes parábolas, completen las coordenadas de los puntos marcados:





Problema 10

Justificar la respuesta en cada caso
a) ¿Es posible que una parábola pase por los puntos (100; 1) y (-100; 1) y su vértice sea (0;2)?

b) ¿Cuál puede ser el vértice de una parábola que pasa por los puntos (0; 2), (10; 2)?

c) ¿Es posible que un parábola pase por los puntos (-126; 8) y (124; 8) y su vértice sea (2;1)?

d) ¿Cuál puede ser las coordenadas del vértice de una parábola que pasa por los puntos (-235; 15) y (242; 15)?

e) ¿Es posible que una parábola con vértice en el punto v= (0;-3) pase por los puntos (4;2) y (-4; -2)?

Problema 11

Hallar el vértice y el eje de simetría de cada parábola. Estudiar si la parábola corta al eje x, y dónde.

a) $y = 2(x-2)^2 + 1$

b) $y = -(x+2)^2 + 4$

c) $y = -2(3x-1)^2 - \frac{1}{2}$

d) $y = (2x+2)^2 - 9$

e) $y = 4(x+2)^2 - 1$

f) $y = (2x+2)^2 - 1$

g) $y = 2(x-2)^2$

h) $y = x^2$

Problema 12

Dadas las siguientes funciones y gráficos, relacionar cada una de las fórmulas con uno de los gráficos.

1) $y = 4(x+3)^2 - 1$

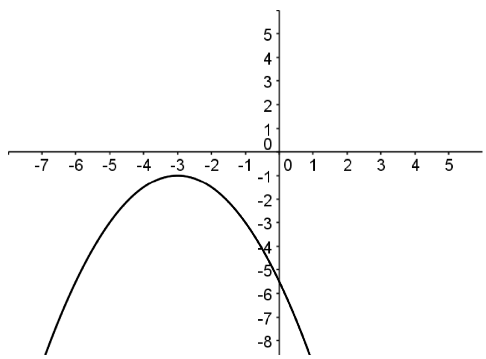
2) $y = -(x-1)^2 + 3$

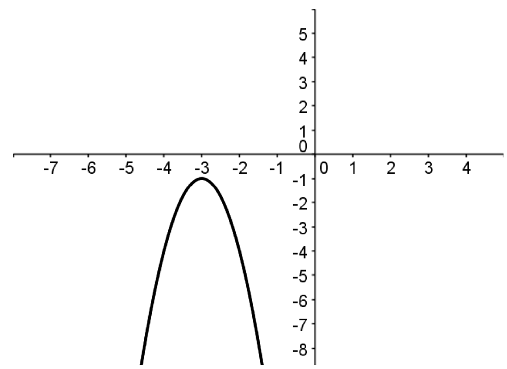
3) $y = -3(x+3)^2 - 1$

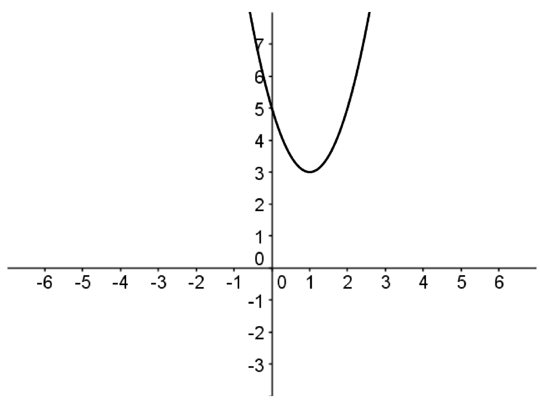
4) $y = 2(x-1)^2 + 3$

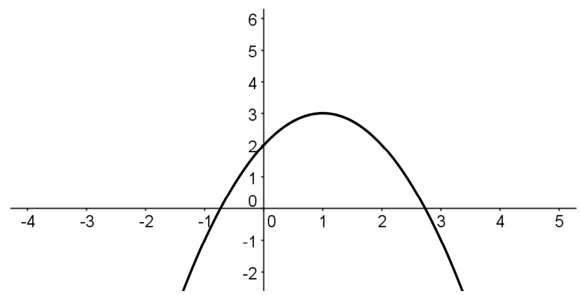
5) $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$

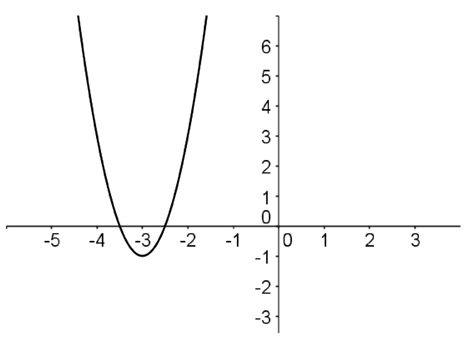
6) $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$

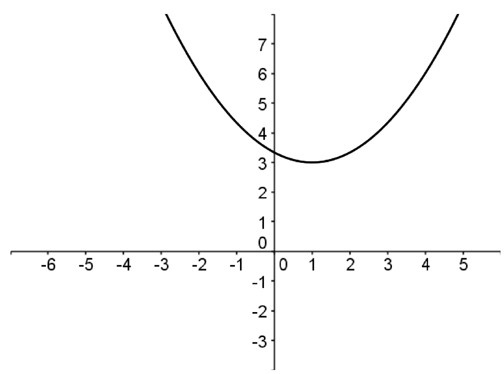












Problema 13

Si es posible, escribí: (si no es posible, explicá por qué):

a) *La ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a 9 en x = 5. ¿Hay una sola posibilidad?*

b) *La ecuación de una parábola que tenga un máximo igual a 8 en x = - 7, y que pasa por el punto (5;1).*

c) *La ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a 3 en x = 7 y pase por el punto (5;0).*

d) *La ecuación de una parábola que tenga un mínimo en x=1 y que no corte al eje de las abscisas.*

e) *Las ecuaciones de dos parábolas que pasen por los puntos (4; 9) y (8; 9).*

EJERCICIOS DE REPASO

1. Graficar y dar las fórmulas de tres parábolas cuyo máximo sea 3.

2. ¿Qué condiciones deben cumplir *a* y *b* para que la fórmula general $y = a\left(x+b\right)^2 + 3$ represente a las parábolas con máximo 3?

3. Escribir las fórmulas de dos parábolas con vértice en el punto $\left(-2;3\right)$ que no intersequen al eje x.

4. Escribir las fórmulas de dos parábolas con vértice en el punto $\left(-2;3\right)$ que intersequen al eje x.

5. Dar la fórmula que represente a todas las parábolas con vértice $\left(-2;3\right)$.

6. Escribir las fórmulas de dos parábolas que tengan conjunto imagen: $\left[4;+\infty\right)$ y eje de simetría: x = - 4.

7. Escribir las fórmulas de dos parábolas que tengan conjunto imagen: $\left[4;+\infty\right)$ y eje de simetría: x = 0.

8. Escribir una fórmula que represente a todas las parábolas con conjunto imagen $\left[5;+\infty\right)$

9. ¿Qué características tienen las parábolas que están representadas por la fórmula: $y = a\left(x+2\right)^2 + b \quad a<0 \quad b<0$

10. Hallar la fórmula de la parábola con vértice V = (-2; 0) y pasa por el punto $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$.

11. Hallar la fórmula de la parábola con vértice V = (0; 3) y x = 2 es raíz.

12. Hallar la fórmula de la parábola con vértice en el punto (-2; 1) y la ordenada al origen es 4.

13. Hallar la fórmula de la parábola cuyas raíces son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$ y el máximo es 4.

14. Dibujar 4 parábolas cuyo conjunto imagen sea: $\left[-1;+\infty\right)$. Luego proponer una fórmula que las represente.

15. Dibujar 2 parábolas cuyo conjunto de positividad sea: $\left(-\infty;0\right)\cup\left(4;+\infty\right)$.

16. Dibujar parábolas con $\mathrm{Im} = \left[-1;+\infty\right)$ y $C^+ = \left(-\infty;0\right)\cup\left(4;+\infty\right)$ simultáneamente. ¿cuántas hay?

17. Proponer una fórmula para la/s parábolas del problema anterior.

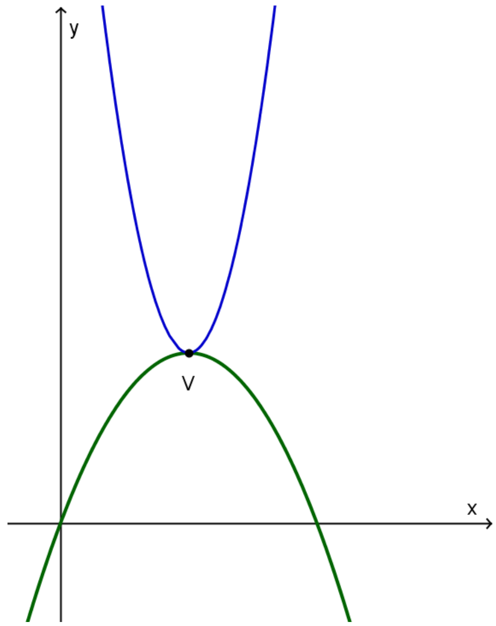
18. Hallar la fórmula de la parábola que pasa por el punto $\left(0;-18\right)$ y tiene conjunto de negatividad $C^- = \mathbb{R} - \left\{-3\right\}$

19. La recta de ecuación: y = 10 interseca a la parábola *f* en los puntos de abscisas -1 y 5, en cambio, la recta de ecuación: y = - 8 interseca a la misma parábola en un solo punto. Hallar la ecuación de la parábola *f*.

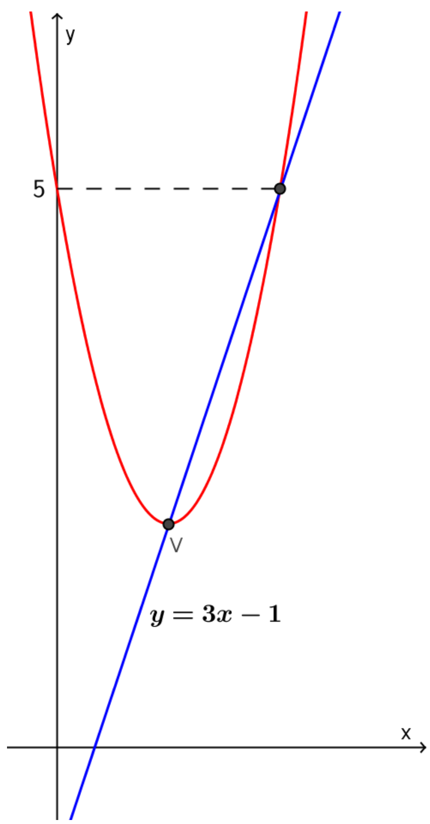
20. Hallar una fórmula general para las parábolas con intervalo de decrecimiento $\left(-\infty;-3\right)$ que no intersecan al eje x.

21. ¿Qué valores debe tomar a para que las parábolas representadas por la fórmula $y = a(x+5)^2 - 10$ no pasen por el cuarto cuadrante?

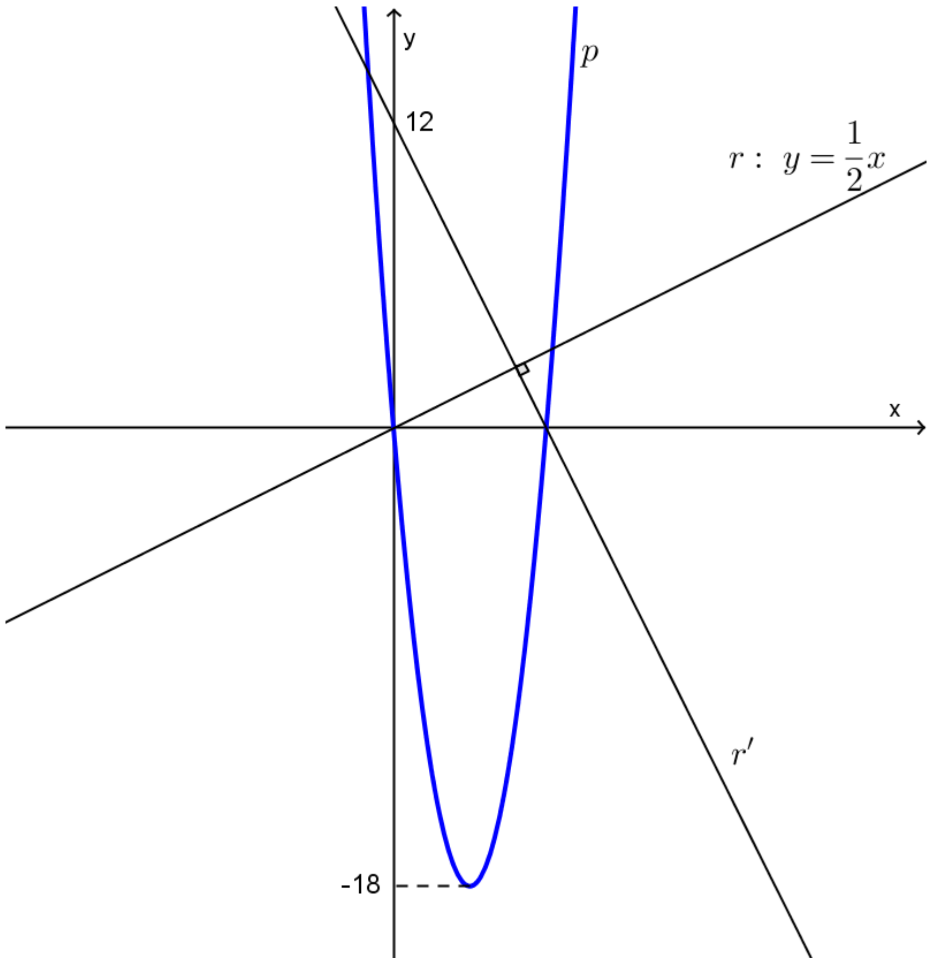
22. Las dos parábolas que se muestran a continuación comparten el vértice. La fórmula de una de ellas es $y = (2x-3)^2 + 2$. Hallar la fórmula de la otra.



23. Hallar la fórmula de la parábola que se muestra a continuación, sabiendo que la recta pasa por el punto V (vértice de la parábola).



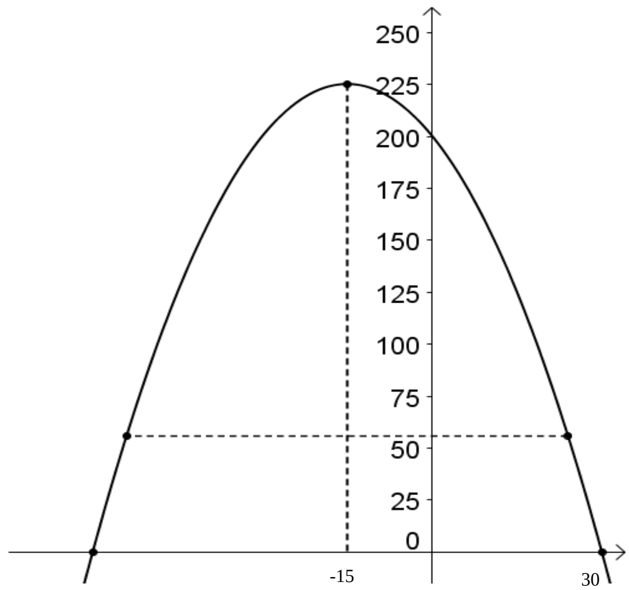
24. Observando la figura, determinar la ecuación de la parábola *p*. ($r \perp r'$)



Respuestas: 2) $a < 0 \, , b \in \mathbb{R}$ 5) $y = a(x+2)^2 + 3 \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$ 8) $y = a(x-b)^2 + 5 \quad a > 0 \, , b \in \mathbb{R}$ 9) No cortan al eje de abscisas, se encuentran en el 3er y 4to cuadrante. 10) $y = -\frac{1}{50}(x+2)^2$ 11) $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ 12) $y = \frac{3}{4}(x+2)^2 + 1$ 13) $y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$ 14) $y = a(x-b)^2 - 1 \quad a > 0 \, , b \in \mathbb{R}$ 17) $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$ 18) $y = -2(x+3)^2$ 19) $y = 2(x-2)^2 - 8$ 20) $y = a(x+3)^2 + b \quad a > 0 \, , b > 0$ 21) $a > \frac{2}{5}$ 22) $y = -\frac{8}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$ 23) $y = 3(x-1)^2 + 2$ 24) $y = 2(x-3)^2 - 18$

Problema 14

Marcar todas las fórmulas que pueden corresponder al gráfico. Explicar por qué.



a) $y=-\frac{1}{9}(x+15)^2+225$

b) $y=\frac{1}{9}(x+15)^2+225$

c) $y=-\frac{1}{9}(x+60)(x-30)$

d) $y=-\frac{1}{9}x^2+\frac{30}{9}x+225$

e) $y=\frac{1}{9}x^2+\frac{30}{9}x+200$

f) $y=-\frac{1}{9}x^2-\frac{30}{9}x+200$

Problema 15

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones tienen el mismo gráfico que $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+4,5$ *?*

I) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$

II) $y=-\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$

III) $y=-\frac{1}{2}(5x-5)^2+4,5$

IV) $y=-\frac{1}{2}(x-2)x+4$

V) $y=-\frac{1}{2}(x-6)(x+4)-8$

b) Considerando todas las funciones de la parte a), ¿en cuáles de las fórmulas podés "leer" dónde está el vértice de la parábola que define? ¿En cuáles podés "leer" cuáles son sus raíces?

c) ¿Qué informaciones podemos obtener a partir de las fórmulas IV y V?

d Completar la fórmula $y = -\frac{1}{2}(\qquad)(\qquad) +$ *para que sea equivalente a la fórmula V.*

Problema 16

En una chacra se quiere cercar un área rectangular para la huerta, aprovechando una pared existente. Para los otros tres lados del rectángulo se dispone de 170 m de tejido metálico.
a) ¿Cuál será el área de la huerta si uno de los lados de la cerca mide 30 m?
b) Proponer una fórmula que permita conocer la superficie de la huerta en función de uno de los lados.
c) Hallar las dimensiones de la cerca para que la huerta tenga la mayor superficie posible.

Problema 17

El dueño de un cyber decidió emplear un sistema de socios con un cargo fijo durante el mes para los clientes habituales. El sistema consiste en que los clientes se hacen socios y pagan una cuota fija por mes, que los autoriza a utilizar las computadoras cuando quieran y el tiempo que quieran. La cuota salía $26, y se hicieron socios 100 personas. Luego de variar el precio algunas veces, el dueño registró que por cada $1 que aumentaba siempre perdía 2 socios. Suponiendo que esto es cierto, respondé las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto recaudó cuando la cuota salía 26?
b) ¿Con cuántos socios se va a quedar, si aumenta la cuota $4? ¿Y cuánto recaudará en ese caso?
c) Propongan otros posibles aumentos e indiquen cuántos socios quedarán y cuánto recaudará el dueño en esos casos.
d) Propongan una fórmula que nos permita calcular cuánto dinero va a recaudar por mes, dependiendo de cuánto se aumente la cuota.
e) ¿Podrías decir cuánto tiene que aumentar el dueño para obtener la máxima recaudación? ¿Y cuál sería esa recaudación?
f) Propongan otra fórmula que permita calcular el dinero que se va a recaudar en función del valor de la cuota.

Problema (tarea)

Una compañía de TV por cable que tiene 20.000 abonados y cobra $ 35 mensuales, ordena un estudio de mercado para decidir el aumento que aplicará en sus tarifas. Los resultados de dicho estudio indican que la empresa perderá 400 abonados por cada peso que aumente la tarifa.

a) *Determinar la expresión (fórmula) que permite conocer el Ingreso en función del incremento aplicado a la tarifa.*
b) *¿Cuál deberá ser el aumento para maximizar el ingreso de dinero?*

Problema 18 (tarea)

Para cada una de las siguientes funciones decidir si tienen máximo o mínimo y hallarlo.

a) $f(x) = -2(x-3)(x+5)$ b) $g(x) = (7x-3)(x+5)$ c) $h(x) = (x-9)(x+21)+3$

d) $m(x) = x^2 + 65$ e) $p(x) = (x-4)^2$ f) $n(x) = (2x-5)(x-52)$

Problema 19

a) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática que cuyos ceros sean 3 y –7? ¿Cuántas funciones cuadráticas cumplen esa condición? ¿Por qué?

b) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática que cumpla que $x = 7$ y $x = 11$ tengan la misma ordenada? ¿Cuántas funciones cuadráticas cumplen esa condición? ¿Por qué?
c) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática f que verifique $f(5) = f(25) = 18$?

Problema 20

Hay un famoso gol de tiro libre, convertido por José Luis Chilavert, arquero de Vélez, que resultó "inatajable" para Burgos, arquero de River, en el partido del día 22 de marzo de 1996. Se sabe que la trayectoria de la pelota lanzada por Chilavert puede ser representada por la siguiente función: $h = -0{,}02\,x^2 + 1{,}16x$ en donde x representa la cantidad de metros en línea recta sobre el pasto desde el pie de Chilavert hasta el lugar donde se encuentra la pelota, y h, la altura alcanzada por la pelota, medida en metros.
a) ¿A cuántos metros de Chilavert la pelota hubiera tocado el piso (de no haber sido interrumpida su trayectoria por la red del arco)?
b) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la pelota y a qué distancia del lugar de partida?

Problema 21 (Tarea)

Decidir si cada una de las siguientes funciones tiene máximo o mínimo y hallarlo.
a) $f(x) = -2\,x^2 - 7x$ b) $g(x) = 14x^2 + 3x$ c) $h(x) = x^2 - x$
Calcular las raíces o ceros de estas funciones.

Respuestas:
$\mathrm{Max}(f) = \frac{49}{8}$ $C^0(f) = \left\{-\frac{7}{2};0\right\}$ $\mathrm{Mín}(g) = -\frac{9}{56}$; $C^0(g) = \left\{-\frac{3}{14};0\right\}$; $\mathrm{Mín}(h) = -\frac{1}{4}$ $C^0(h) = \{0;1\}$

Problema 22

Realizar un gráfico aproximado de la siguiente parábola: $y = x^2 + 16x + 66$

Problema 23 (Tarea)

Hallar el vértice de las parábolas dadas por las fórmulas que siguen.
a) $y = 2x^2 - 10x + 11{,}75$ b) $y = x^2 - 3$ c) $y = x^2 + \frac{1}{2}x$ d) $y = -x^2 + 10x - 25$
e) $y = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ f) $y = x^2 - 12x - 35$
Respuestas: a) $V = \left(\frac{5}{2};-\frac{3}{4}\right)$ *b)* $V = (0;-3)$ *c)* $V = \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{16}\right)$ *d)* $V = (5;0)$ *e)* $V = \left(-\frac{2}{3};-\frac{16}{9}\right)$ *f)* $V = (6;-71)$

Problema 24

Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación con una velocidad inicial de 10 metros por segundo.
Se sabe que $h(t) = -5\,t^2 + 10t + 15$, es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra la piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.
a) ¿A qué altura se encuentra la piedra 0,5 segundos después de que fue lanzada?
b) ¿A qué altura se encuentra la ventana?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra y en qué momento la alcanza?
d) A partir del gráfico de la función, estimar cuándo chocará esa piedra con el suelo.

Problema 25

Supongamos que en el mismo instante en que se lanza la piedra del problema anterior, simultáneamente, desde el suelo, se lanza otra piedra con una velocidad de 20 m/s.
Se sabe que en este caso $j(t) = -5t^2 + 20t$ *es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra esta piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.*
a) ¿En qué momento esta piedra vuelve a tocar el suelo?
b) Una persona sentada dentro de la habitación, ¿puede ver pasar a esta piedra?
c) ¿En algún momento las piedras alcanzan la misma altura? ¿A qué altura sucede esto?
d) ¿Dónde se encuentra la piedra que fue lanzada desde la ventana cuándo la que se lanzó desde el suelo alcanza la altura máxima?

Problema 26

Hallar los ceros de la siguiente función: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

Problema 27 (Tarea)

a) Hallar la expresión canónica de las siguientes fórmulas de funciones cuadráticas:
$f(x) = -2x^2 - 4x - 2$ $\quad g(x) = -x^2 - 2x$ $\quad h(x) = 3x^2 + 18x - 21$ $\quad j(x) = 3x^2 + 5$

b) Buscar los ceros de estas funciones.

Problema 28 (Tarea)

Buscar los ceros de la funciones b), d) y e) del problema 22.

Respuestas: a) $C^0 = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ *b)* $C^0 = \{5\}$ *c)* $C^0 = \left\{-2; \frac{2}{3}\right\}$

Problema 29 (Tarea)

¿En qué momento del descenso la piedra del ejercicio 24 alcanza 8,75m de altura?

Problema 30 (Tarea)

Sabiendo que la función cuadrática cumple simultáneamente: f(4) = f(2) = - 6 y f(0) = 18 , hallar el conjunto imagen y el conjunto de negatividad de la función f.
Rta:: $C^- = \left(3-\sqrt{3}; \sqrt{3}+3\right)$ $\qquad \mathrm{Im} = [-9; +\infty)$