

Polinomios en $R[x]$ - Función Polinómica

1. Determinar el grado y el término independiente de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^5 - 2x + 1$

b) $Q(x) = x + 3x^8 + 2x^3 - 3x - 4$

c) $M(x) = (3x - 2)^2$

d) $N(x) = (3x - 2)^2 \cdot (x + 5)$

e) $S(x) = (3x - 2)^2 \cdot (x + 5) \cdot x^3$

f) $T(x) = 6(x + 2)^3 \cdot (2x + 5) \cdot (x - 1)^5$

2. Indicar en cada caso el grado y las raíces de las siguientes funciones polinómicas:

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 5) \quad S(x) = 3(x - 2)(x + 3)^2 \quad Q(x) = x^3 \left(x + \frac{2}{3} \right) (x - 4)^3$$

3. En cada caso, encontrar, si es posible, una función polinómica que verifique las condiciones dadas:

- P es de grado 3 y sus raíces son: -1, 2 y 3.
- Q es de grado 3, sus raíces son: -1, 2 y 3 y $Q(0) = -2$.
- Las raíces de R son: 1; 2 y 3, su grado es 4 y $R(-1) = 4$.
- Raíces sean: 0 y 2, que tenga el menor grado posible.

4. Escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles (polinomios de grado 1 o polinomios de grado dos sin raíces).

a) $x^2 - 4$ b) $3x^2 - \frac{1}{3}$ c) $x^2 + x - 2$ d) $-3x^2 + 6x + 45$ e) $\frac{5}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - 5$

f) $x^3 + 3x^2 + 2x$ g) $x^4 + x^3 - 6x^2$ h) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^2$ i) $3x^4 - 5x^3 - 2x^2$ j) $8x^4 - 2x^2$

k) $3x^4 + 9x^2$ l) $x^3 + 3x^2 - 4x$

5. Sea $P(x) = x^3 - 7x - 6$

- Determinar si $x + 1$ y $x + 2$ son factores de P .
- ¿Es posible escribir al polinomio P de la forma $P(x) = (x + 1)(x + 2) \cdot Q(x)$? ¿Por qué? ¿De qué grado es el polinomio Q? Hallar Q.
- Hallar todas las raíces de P .
- Escribir la expresión factorizada de P y dar sus raíces.

6. Sea $P(x) = 2x^3 - 14x - 12$

- ¿Es posible escribir al polinomio P en la forma $P(x) = (x + 1) \cdot M(x)$? ¿De qué grado es el polinomio M? Hallar M.

- b. Hallar todas las raíces de P .
- c. Escribir la expresión factorizada de P .

7. Sea $P(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12$

- a. Sabiendo que el polinomio $P(x) = (x^2 + 1) \cdot Q(x)$, hallar $Q(x)$.
- b. Hallar todas las raíces reales de P .
- c. Escribir el polinomio $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles.

8. Hallar, en cada caso, el cociente y resto de la división $P(x):Q(x)$

- a. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$ $Q(x) = x^2 - 3x + 2$
- b. $P(x) = 12x^3 + 6x - 5$ $Q(x) = 4x^2 + 3$
- c. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ $Q(x) = 3x^2 + x$
- d. $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 3$ $Q(x) = 2x^2 + x + 3$
- e. $P(x) = 12x^3 - 28x^2 - 13x + 39$ $Q(x) = 6x^2 + x - 8$

9. Hallar en cada caso el cociente y el resto de $P(x) : Q(x)$.

- a. $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ $Q(x) = x - 3$
- b. $P(x) = x^4 - 2$ $Q(x) = x + 1$
- c. $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ $Q(x) = x + 2$

10. Teniendo en cuenta los datos que se dan, escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles

- a) $O(x) = x^3 + x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$, siendo $O\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
- b) $M(x) = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$; siendo $x - \frac{1}{3}$ un factor de M .
- c) $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$; -2 y 1 son raíces de Q .
- d) $R(x) = x^3 + x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4}$ $3/2$ es raíz de R

11. Proponer dos polinomios mónicos diferentes, de grado 3, cuya única raíz real sea -5 .

12. Decidir si el polinomio $x^3 + 5x^2 - 2x - 10$ cumple con las condiciones del ejercicio anterior.

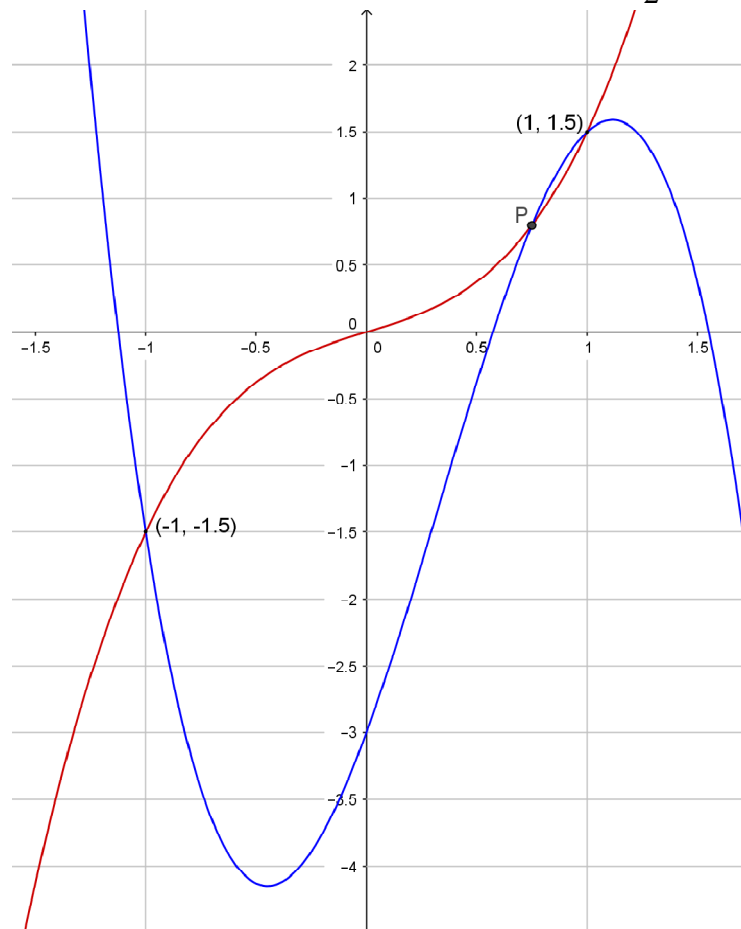
13. Hallar $P(x)$, siendo $P(x) \cdot Q(x) = x^3 + 1$ y $Q(x)$ un polinomio de grado 1.

14. Escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles.

- a) $x^4 - x$
- b) $-2x^4 - 16x$

c) $(x^2 - 4)(x^3 + 1)$

15. Se muestran los gráficos de las funciones $j(x) = -3x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - 3$ y $p(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$



- a) Determinar las coordenadas del punto P.
 b) Determinar los valores de x para los cuales $j(x) > p(x)$.

16. Determinar las coordenadas de todos los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $j(x) = -x^3 + 2x^2 + 6$ y $p(x) = -2x^3 - x^2 + 9x + 1$ si se sabe que la abscisa de uno de ellos es 1.

17. Hallar el conjunto de positividad de las siguientes funciones polinómicas:

$$h(x) = -2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+5)$$

$$m(x) = 3(x-1) \cdot (x+3)^4 \cdot (x+2)^3$$

$$g(x) = (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$

$$f(x) = (x-1)^2(x^2 - 4x + 4)$$

18. Hallar el conjunto solución de la siguientes inecuaciones (Sugerencia: Construya un gráfico aproximado de los polinomios que aparecen en el miembro izquierdo de la desigualdad)

a) $(x+2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot x \leq 0$

b) $-3(x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot x \geq 0$

c) $2x^3 + 9 \leq 18x + x^2$

d) $-2x^4 - x^3 + 3x^2 > 0$

e) $x^3 + 2x \leq 3x^2 + 6$

19. Proponer la expresión de una función polinómica B de grado 3, con las mismas raíces de $P(x) = (x-1)(x^3+8)$ y $C^-(B) = (1, +\infty)$.

20. Sean los polinomios $T(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3$ y $Q(x) = (x^2+3)(x^3-2x^2+x)$, se pide:

a) Expresar los polinomios T y Q como producto de polinomios irreducibles, sabiendo que 1 es una raíz doble de Q .

b) Proponer un polinomio mónico J de grado 3, divisor de Q , cuya única raíz real sea 0.

c) Dar la expresión factorizada de un polinomio M , que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

i. $C^+(M) = C^+(Q)$ ii. $C^-(M) = C^-(T)$ iii. El grado de multiplicidad de las raíces de M es menor a 3. iv. $gr(M) = 7$

21. Escribir la expresión de una función f polinómica mónica que cumpla simultáneamente:

i) $gr(f) = 4$

ii) $C^+(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$

iii) $f(0) = 32$

Algunas respuestas:

3. b) $Q(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$ d) $Q(x) = x^2 - 2x$

4. a) $(x-2)(x+2)$ b) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ c) $(x-1)(x+2)$ d) $-3(x+3)(x-5)$

e) $\frac{5}{3}(x-1)(x+3)$ f) $x(x+1)(x+2)$ g) $x^2(x-2)(x+3)$ h) $\frac{1}{2}x^2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$ i)

$3x^2(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ j) $8x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ k) $3x^2(x^2+3)$ l) $x(x-1)(x+4)$

6. a) Sí b) $C^0(P) = \{-2; -1; 3\}$ c) $P(x) = 2(x+2)(x+1)(x-3)$.

8. a) cociente: $3x+8$ resto: $23x-20$ b) cociente: $3x$ resto: $-3x-5$ c) cociente: $\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$
 resto: $-\frac{32}{9}x+5$ d) cociente: $x+\frac{3}{2}$ resto: $\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$ e) cociente $2x-5$ resto: $8x-1$

9. a) cociente: $x^2+8x+22$ resto: 67 b) cociente: x^3-x^2+x-1 resto: -1 c) cociente:
 $3x^2+x+4$ resto: -9

10. a) $O(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x+2)$ b) $M(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ c) $Q(x) = (x-1)^2 (x+2)^2$

d) $R(x) = (x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

12. No cumple, tiene tres raíces reales.

13. $x^2 - x + 1$

14. a) $x(x-1)(x^2+x+1)$ b) $-2x(x+2)(x^2-2x+4)$ c) $(x-2)(x+2)(x+1)(x^2-x+1)$

15. a) $\left(\frac{3}{4}; \frac{51}{64}\right)$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right)$

16. $(-5; 181)$ $(1; 7)$

17. $C^+(h) = (-\infty, -5)$ $C^+(m) = (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (1; +\infty)$ $C^+(g) = \left(-3; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$

$C^+(f) = \mathbb{R} - \{1; 2\}$

18. a) $S = (-\infty; -2] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right]$ b) $S = (-\infty; -3] \cup [0; 2]$ c) $S = (-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right]$

d) $S = \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup (0; 1)$ e) $S = (-\infty; 3]$

19. $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / B(x) = a(x+2)^2(x-1), a \in \mathbb{R}^-$

20. a) $T(x) = x^3(x+2)^2$ $Q(x) = x(x^2+3)(x-1)^2$ b) $J(x) = x(x^2+3)$

21. $f(x) = (x^2+2)(x+4)^2$