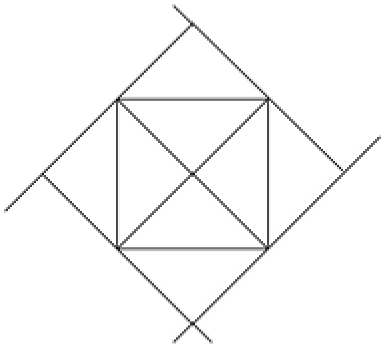
# TRABAJO PRÁCTICO 1

## *Problema 1: COMPARAR ÁREAS DE CUADRADOS*[1]

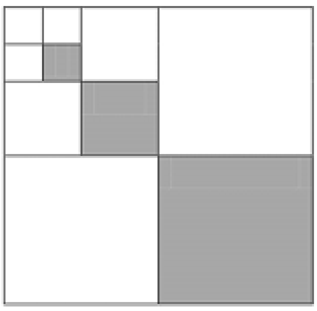
"A partir de un cuadrado realizaremos una nueva construcción: se trazan las diagonales y por cada vértice se dibuja una paralela a la diagonal. A esta construcción que da origen a otra figura la denominaremos ***el paso***."
El dibujo final, realizado en el pizarrón, es el siguiente (El cuadrado original, o paso 0, y el cuadrado construido, que es el resultado del paso 1):



a) Compará el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.
b) Si se repite el paso varias veces ¿podrías indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo respecto del cuadrado original?
c) Si llamamos A al área del cuadrado original, determiná qué área tendrá el cuadrado generado en el paso 17.
d) ¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado obtenido en el paso **n**? (también en este caso el cuadrado original tienen área A).
e) Indicar en qué porcentaje aumentó el área en cada paso.

## **Problema 2:** *LOS CUADRADOS SOMBREADOS*

Observa la siguiente figura:



A un cuadrado -el más grande, que llamaremos inicial - cuya área es 1, se le trazaron las medianas y se sombreó el cuadrado inferior derecho. En este caso se llama paso al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. Al cuadrado que queda determinado en la parte superior izquierda se le trazan sus medianas y se sombrea el cuadradito que queda en la parte inferior derecha. Y así se continúa.

[1] Los primeros 6 problemas que aquí se presentan forman parte del documento "Función exponencial" de la Serie "Aportes para la enseñanza. Nivel Medio", en proceso de edición en la Dirección de Currícula y Enseñanza

a) ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el primer paso, en el segundo y en el cuarto?
b) ¿Habrá algún paso en el que se obtenga un cuadrado de área $\frac{1}{60}$?
c) Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es $\frac{1}{16384}$ ¿cuál será el área sombreada en el cuadrado que se obtenga en el siguiente paso? ¿Y en el anterior?
d) ¿Habrá una expresión general que me permita saber el área de los sucesivos cuadraditos sombreados según la cantidad de pasos que se hicieron?
e) ¿Podrías contestar la pregunta anterior si el área del cuadrado original fuera A en lugar de 1?
f) Si el trabajo realizado sobre el cuadrado de área 1 fuera hecho sobre otro cuadrado de área 1024. ¿Podrías contestar las mismas preguntas a partir de tus respuestas anteriores?
g) Sobre un cuadrado, de área desconocida, se tuvieron que realizar 10 pasos para llegar a un cuadrado sombreado de área 1. ¿Te alcanza este dato para conocer el área del cuadrado inicial?
h) ¿Es posible inventar un valor A para el área del cuadrado original de manera que en alguno de los pasos se obtenga un cuadradito cuya área sea $\frac{1}{60}$? ¿Cuánto tendría que valer A y cuál sería el paso?

## Problema 3: *LOS PIOJOS*

En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 05-05-08 y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (o sea, los piojos se pueden contar ¡con precisión!). Transcurridos 10 días el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse.

a) ¿Cuántos piojos habrá transcurridos 20 días?
b) ¿Cuántos piojos había transcurridos 5 días?
c) ¿Cuántos piojos se pusieron en la cabeza?
d) ¿Cuántos piojos había el primer día?
e) ¿Cuánto varió la cantidad de piojos al pasar del inicio al 5º día? ¿Y del 5º al 10º día? ¿Y del 10º al 15º día? ¿Y del 15º al 20º día?

| **t** número de días | Nº de piojos | Variación de piojos de pasar del día **t** al día **t+5** |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 5 | | |
| 10 | | |
| 15 | | |
| 20 | | |

## PROBLEMA 4: LUMINOSIDAD EN LA LAGUNA

Una laguna contiene sedimentos uniformemente distribuidos que reducen la transmisión de la luz a través del agua. Dicha luminosidad se reduce en un 20% cada vez que se avanza 1 metro hacia la profundidad de la laguna, (es decir, cualquiera sea el nivel de profundidad en el que se encuentre el buzo, al descender un metro pierde el 20% de la luminosidad que tenía)
Un buzo está pronto a sumergirse en dicha laguna; si consideramos la intensidad de la luz (medida en unidades lumínicas), como de 100 unidades en la superficie,
a) Realizar una tabla que indique la luminosidad para cada uno de los primeros 10 metros.
b) ¿Se podrá decir qué intensidad de luz tendrá el buzo al bajar 0,5 m?
c) Nuestro buzo en cuestión tiene instrumentos de medición que pueden detectar luz hasta una intensidad de 0,2 unidades lumínicas, teniendo en cuenta este dato, ¿podrá detectar luz si baja a 20 m?
d) ¿Hasta qué profundidad podrá descender con su instrumental y aún detectar cierta luminosidad?
e) ¿Alcanzará una luminosidad de $100 \times 0{,}8^{1{,}5}$ ?
f) Si las unidades lumínicas son de 71,55 aproximadamente, ¿a qué profundidad se encuentra el buzo? ¿Qué método te parece más apropiado para responder esta pregunta?

## PROBLEMA 5: *LOS CONTRATOS*

Patricia ha recibido dos propuestas de dos empresas interesadas en su perfil laboral. Una de las empresas le ofrece ocupar el cargo de gerente de proyectos especiales y le hace la siguiente oferta salarial: $10.000 inicialmente, y un aumento mensual de $4.000. La otra empresa le ofrece ocupar el cargo de gerente de publicidad, un sueldo inicial de $10.000 y un aumento del 20% mensual.

a) ¿Qué oferta será más ventajosa?
b) ¿Cómo explicarías convincentemente la conveniencia de una de las ofertas respecto de la otra?
c) Si la persona trabaja 3 meses, ¿cuál es la propuesta más conveniente?
d) ¿Y si firma el contrato por 3 años?

## PROBLEMA 6: *LAS BACTERIAS*

En un laboratorio están experimentando con una población de bacterias. Han observado que, al reproducirse la masa de la población, crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60 gr.

a) ¿Cuál será la masa de las bacterias después de dos horas?
b) Expliquen como varía la evolución de la masa de bacterias a lo largo de las primeras 8 horas.
c) Si en un determinado momento la masa de la población de bacterias es 300 g. ¿Cuál es la masa de la población una hora después?
d) ¿Cuál será la masa de bacterias después de 30 horas de comenzada la observación?

**INSTANCIA DE REVISIÓN DE LOS 6 PROBLEMAS**

**PRIMERA PARTE:**

| PROBLEMA | y | k | a | x |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |

**SEGUNDA PARTE:**

a) Graficar las respectivas fórmulas de los problemas 1 y 2

(considerando a = 1): $y = 2^n$ $\quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) Identificar qué gráfico corresponde a cada una de las situaciones ya trabajadas.

**Gráfico 1**

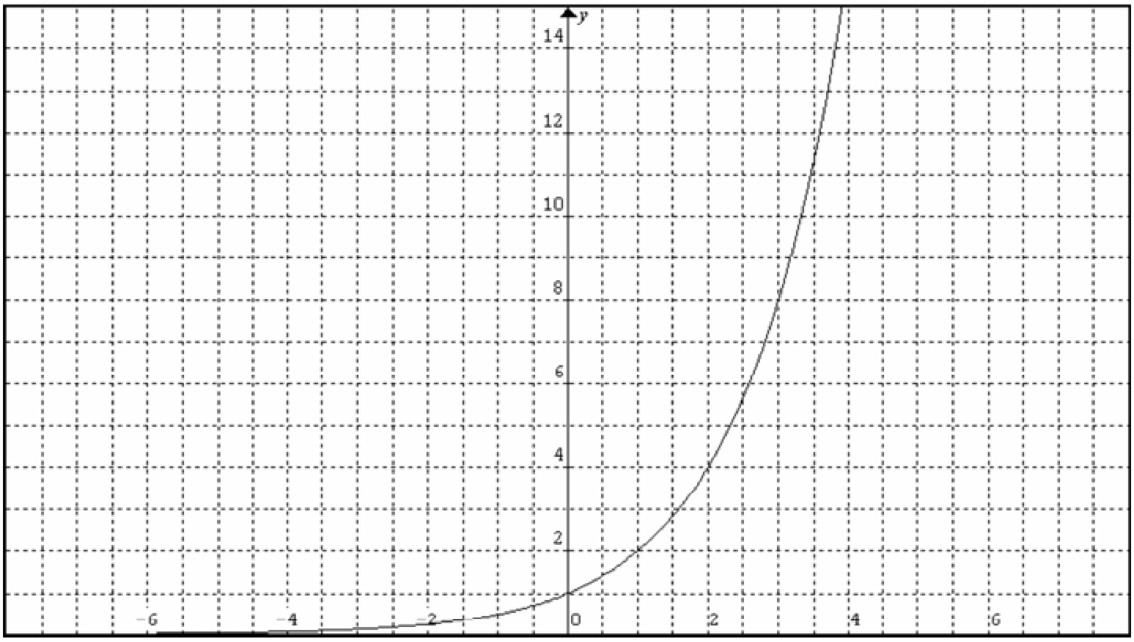


**Gráfico 2**

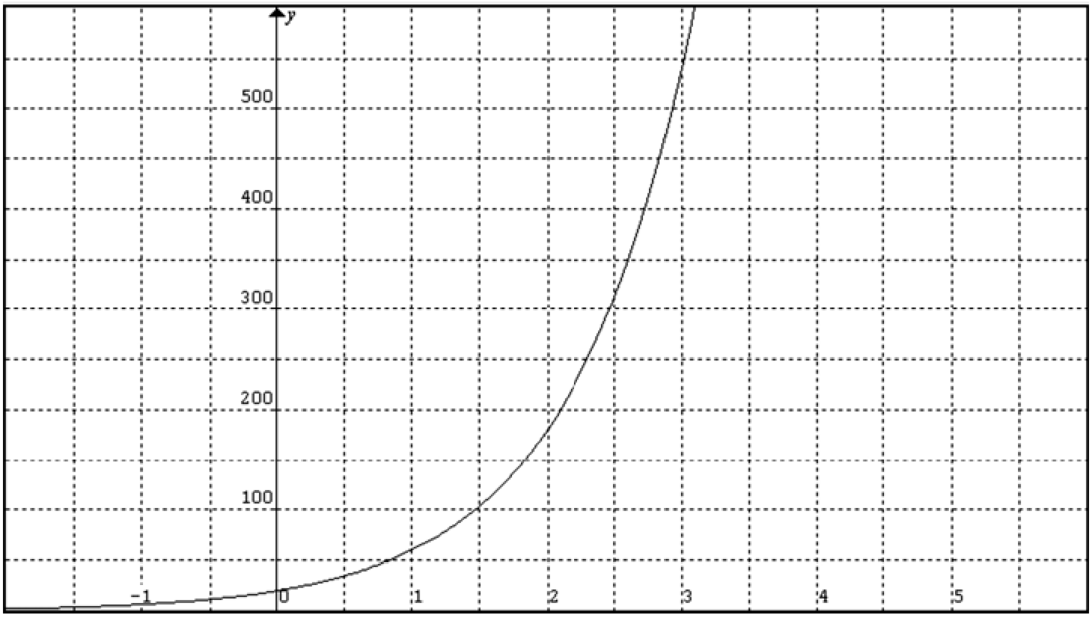



**Gráfico 3**

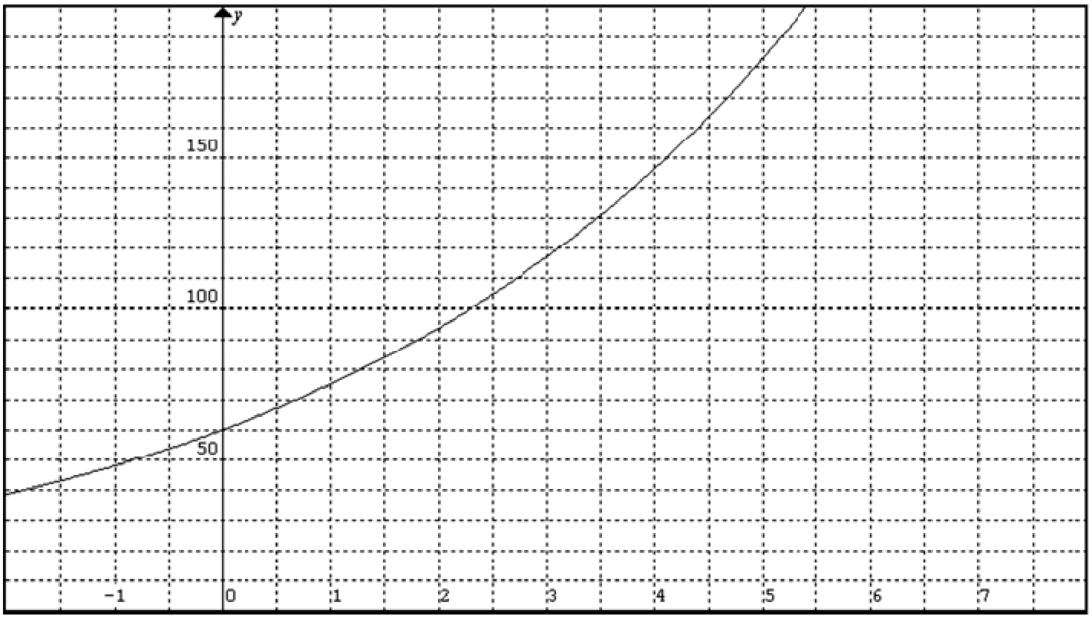


**Gráfico 4**

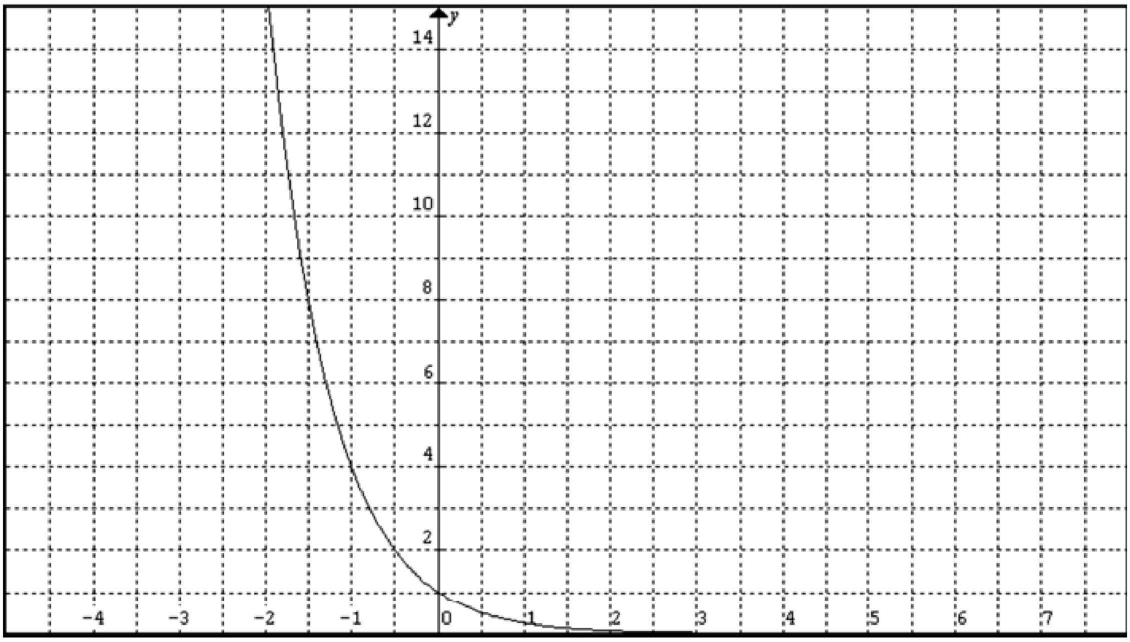



**Gráfico 5**

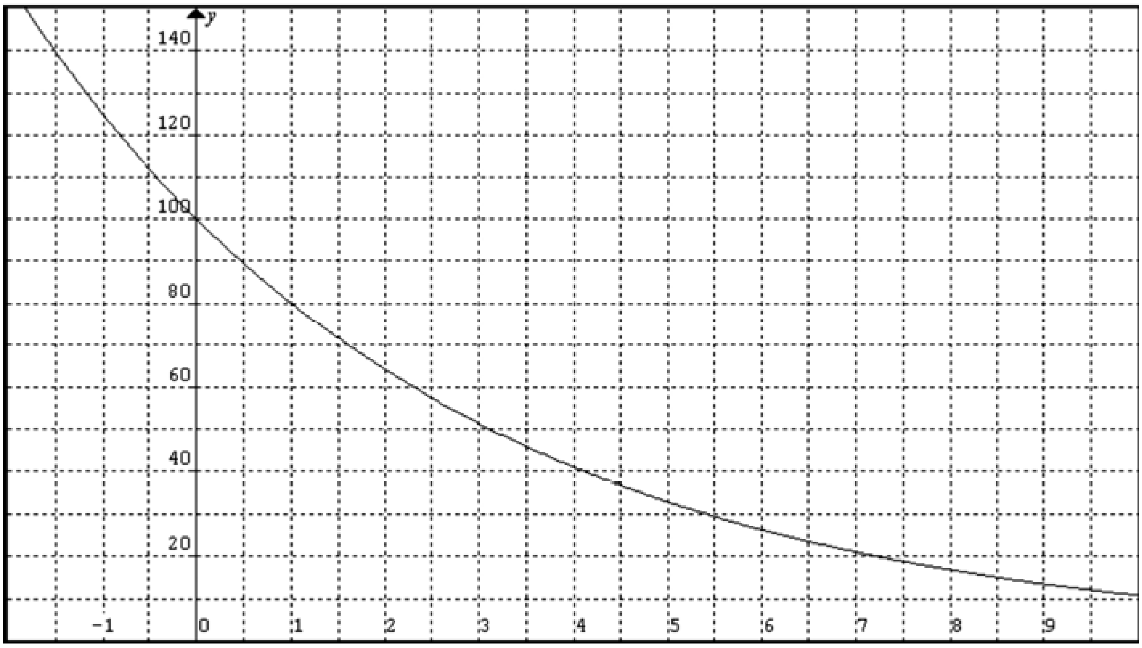
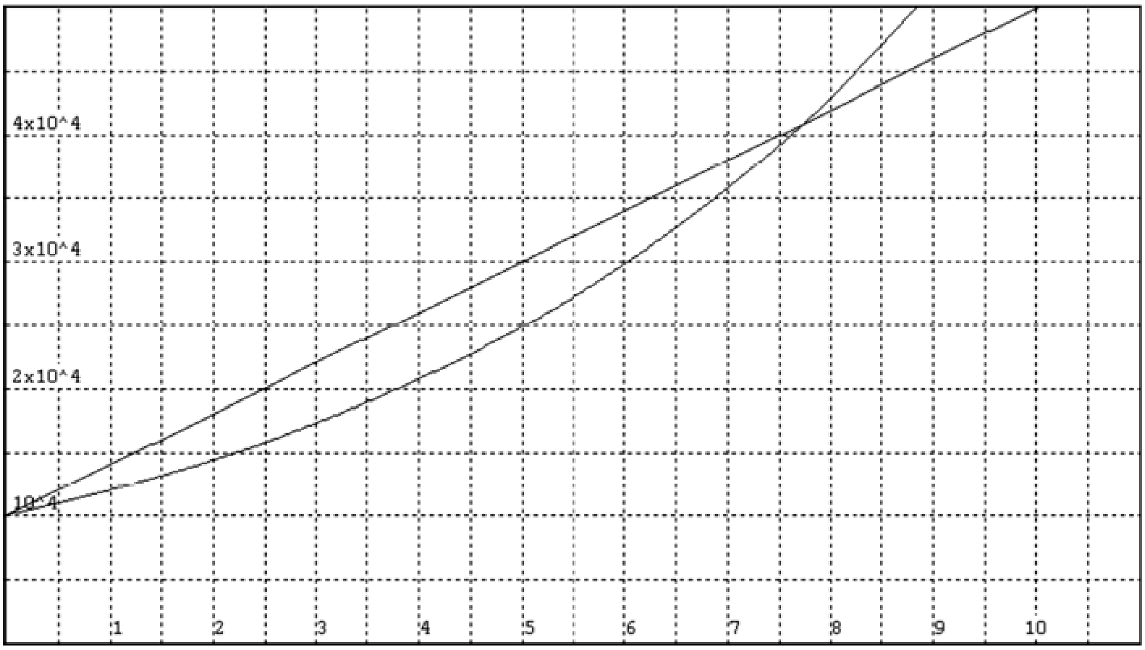


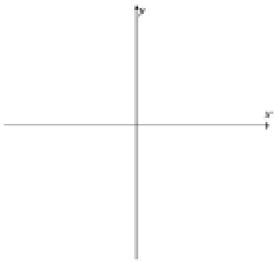
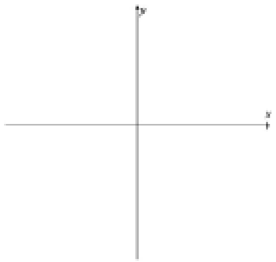
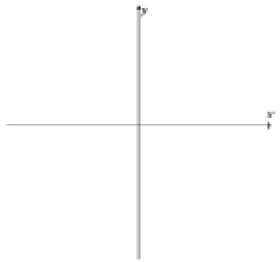
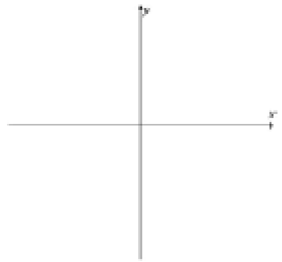
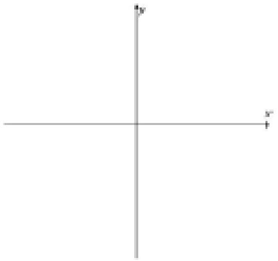
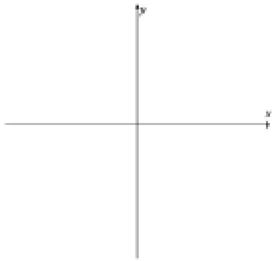
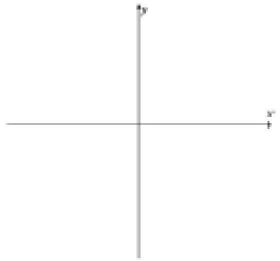
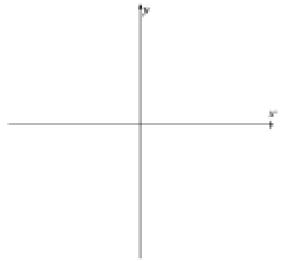
**Gráfico 6**

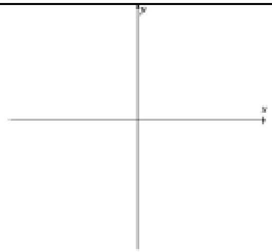
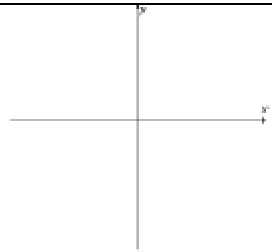
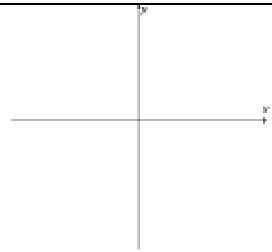
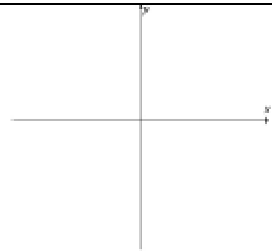



<u>Segunda parte</u>

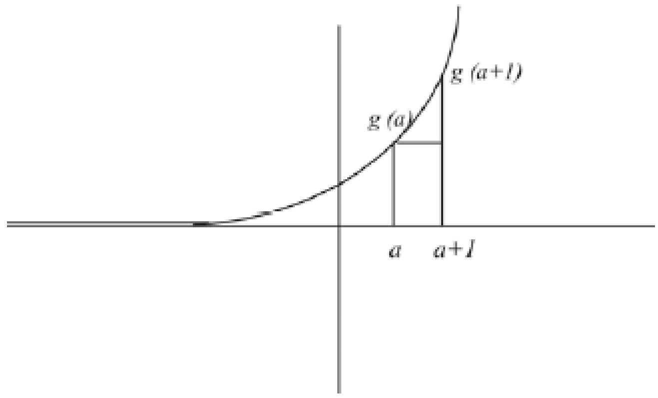
**PROBLEMA 1:** Graficar las funciones exponenciales $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $g(x) = (3)^x$ y encontrar similitudes y diferencias entre los gráficos.

## PROBLEMA 2:

| **Preguntas para responder de cada función** | $f(x)=2^x$ | $g(x)=3^x$ | $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ |
|---|---|---|---|---|
| ¿Qué sucede con las imágenes de cada función cuando la x toma valores cada vez más grandes? | | | | |
| ¿Podés encontrar algún valor de x para que su imagen sea 0? | | | | |
| ¿Qué le pasaría a la imagen de cada función si la multiplicamos por 2? Da tu respuesta en forma gráfica |  |  |  |  |
| Ídem si multiplicamos por 1 |  |  |  |  |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ídem si multiplicamos por 0.5 |  |  |  |  |
| Al multiplicar a la función $y = a^x$ por un número real $k$ distinto de cero se obtiene la función $y = k \cdot a^x$ ¿Mantiene la función $y = k \cdot a^x$ las mismas características? Detalla similitudes y diferencias y busca sus causas. | *Si k=1* | *Si k=1* | *Si k=1* | *Si k=1* |
| | *Si k<0* | *Si k<0* | *Si k<0* | *Si k<0* |
| | *Si k>0* | *Si k>0* | *Si k>0* | *Si k>0* |

**PROBLEMA 3:** Se muestra el gráfico de $f(x) = 2^x$.
¿Es cierto que el segmento horizontal que tiene un extremo en el punto (a; f(a)) corta al segmento vertical de extremos (a+1;0) y (a+1;g(a+1)) en dos partes iguales? Justificá




Idem para $g(x) = 3^x$

**PROBLEMA 4:**

a) Confeccionar una tabla de valores para los pares ordenados que resuelven la ecuación $y = (-1)^x$
b) Ídem para $y = (-2)^x$
c) ¿Puede definirse una función $f(x) = (-2)^x$ ? ¿Por qué?
d) ¿Qué condiciones debe cumplir a para definir una función $f(x) = a^x$ ?
e) Con las condiciones del ítem anterior ¿qué condiciones debe cumplir a para que la función $f(x) = a^x$ sea:

I. creciente?
II. decreciente?

f) ¿Puedes encontrar algún valor de x para que su imagen sea 0?

**PROBLEMA 5:**

Siendo $a > 0$ y $a \neq 1$, caracterizar el conjunto de positividad y negatividad de $f(x) = a^x$ .

**PROBLEMA 6:**
a) ¿Qué modificarías en la función $f(x) = 3 \times 0{,}4^x$ para que:
b) Sea creciente?
c) La nueva función tenga una gráfica que sea simétrica a la gráfica original con respecto al eje y?
d) Su conjunto imagen sea $(-\infty; 0)$ ?
e) Si crees que hay distintos tipos de transformaciones sobre $f(x)$ para lograr lo pedido en cada caso, explica cuáles son.

**PROBLEMA 7:**

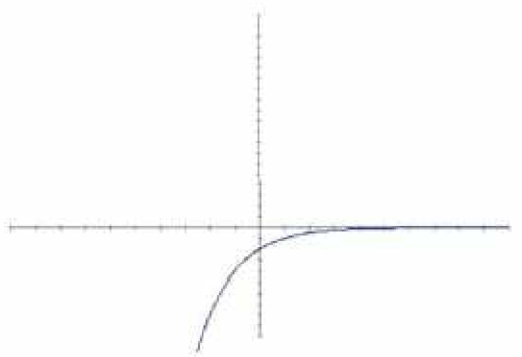
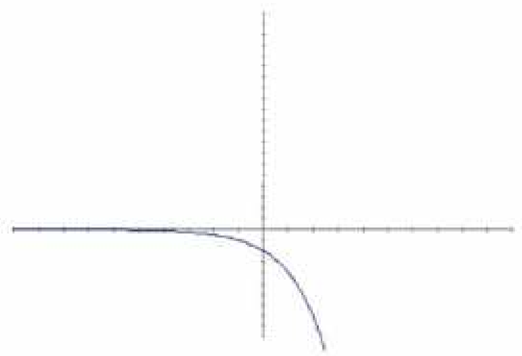
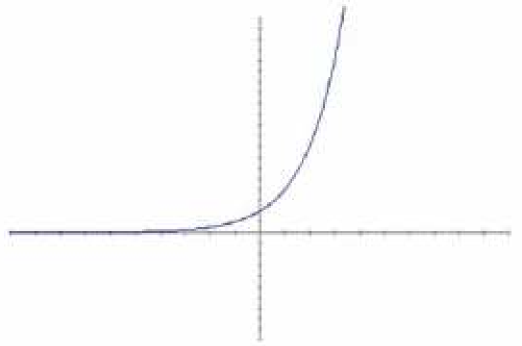
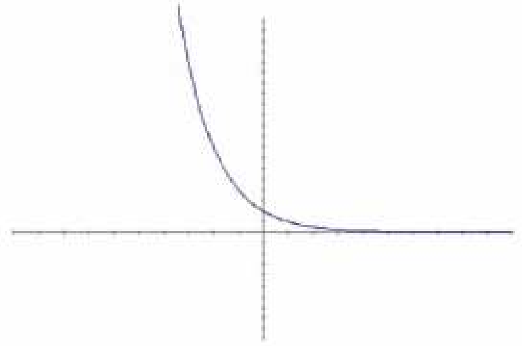
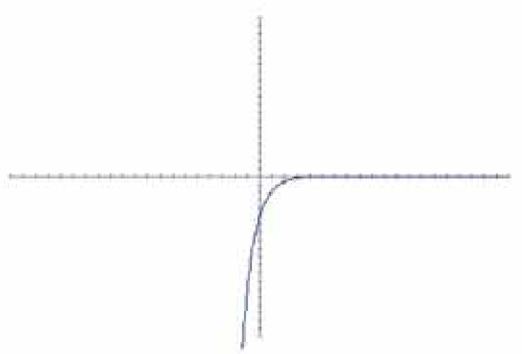
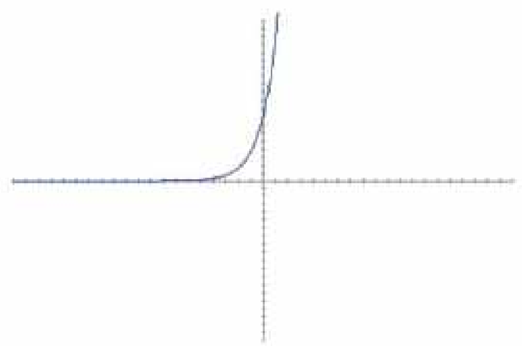
a) ¿Crees qué alcanzará con determinar las condiciones sobre el parámetro a para decidir si $f\,(x) = k\,.a^x$ es creciente o decreciente?

b) ¿Qué condiciones establecerías sobre k y a para que la función $f\,(x) = k\,.a^x$ sea creciente?

**PROBLEMA 8:**

Las funciones graficadas tienen fórmulas del tipo $f\,(x) = k.a^x$

Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de ***a*** y ***k*** en cada caso.

| | |
|---|---|
|  $f_1(x)$ |  $f_2(x)$ |
|  $f_3(x)$ |  $f_4(x)$ |
|  $f_5(x)$ |  $f_6(x)$ |

| Condiciones de ***a*** y ***k*** | Funciones |
|---|---|
| $0 < a < 1$ y $k < 0$ | ....................... |
| $0 < a < 1$ y $k > 0$ | ....................... |
| $a > 1$ y $k > 0$ | ....................... |
| $a > 1$ y $k < 0$ | ....................... |

**PROBLEMA 9:**

a) ¿Será cierto que los gráficos de las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 2.2^x$ son iguales? Explicá las razones que justifican tu elección.

b) Decidan si los gráficos de cada par de funciones coinciden o no. En el caso de que sean coincidentes, expliquen por qué:

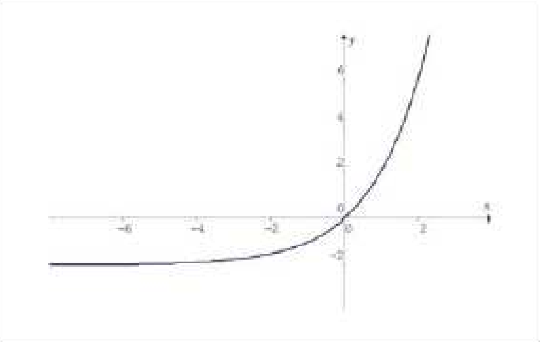
- $f(x) = 2^{-x}$ $\quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $f(x) = 2^{2x}$ $\quad g(x) = 4^x$
- $f(x) = 2^{x^2}$ $\quad g(x) = \left(2^x\right)^2$

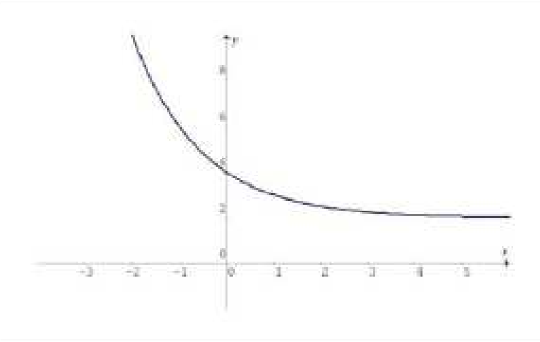
**PROBLEMA 10**

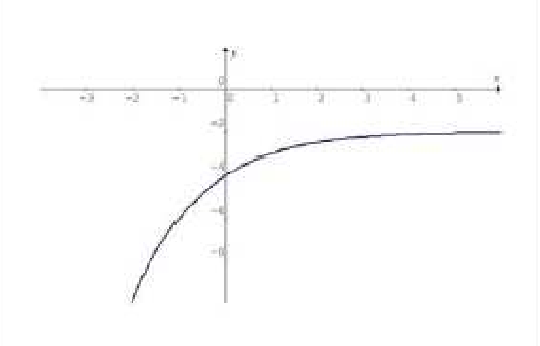
a) ¿Puedes encontrar algún valor de x tal que $f(x) = 2^x - 4$ tenga imagen nula?
b) ¿Existe algún valor de x tal que $f(x) = 3$? ¿Por qué?
c) ¿Existe algún valor de x tal que $f(x)$ sea negativa? ¿Por qué?
d) ¿Puedes hallar algún valor del dominio de la función tal que $f(x) = -3{,}5$ ? ¿y para $f(x) = -3{,}9375$?
e) Ídem para $f(x) = -5$
g) ¿Cuáles son todos los valores posibles que puede tomar la variable x para que la función $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4$ proporcione imágenes negativas?

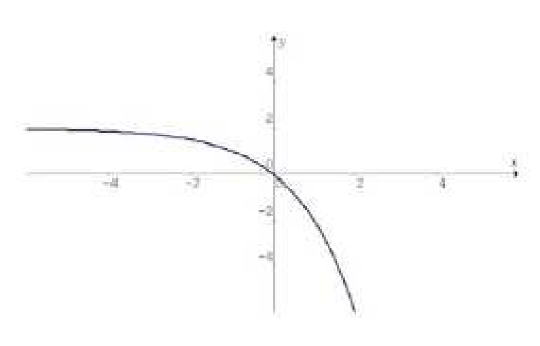
**PROBLEMA 11:**

Las siguientes funciones son del tipo: $y = k.a^x + b$ . Para cada una de ellas analiza el signo de ***k*** y ***b*** y, además, indica si $a \in (1;+\infty)$ o si $a \in (0;1)$









# FUNCIÓN EXPONENCIAL - ACTIVIDAD FINAL

Como ha sido trabajado en clase la familia de funciones exponenciales $f(x)=k\cdot a^x$ y la familia $f(x)=k\cdot a^x+b$ está considerada con parámetros que tienen las siguientes restricciones: $k\neq 0,\ a>0, a\neq 1$ todos números reales. Así serán considerados durante esta actividad.

Se pide que todas las respuestas estén validadas.

I) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones.

1) En la familia de funciones $\boldsymbol{y=k\cdot a^x}$ el signo de las imágenes depende exclusivamente del parámetro $k$.
2) En la familia de funciones $f(x)=k\cdot a^x+b$ el signo de las imágenes depende exclusivamente del parámetro $k$.

II) En este ejercicio se estudia la familia de funciones $f(x)=k\cdot a^x+b$. Analizar las condiciones sobre los parámetros $k$, $a$ y $b$ para que la función:

1) tenga como imagen al conjunto $(4,+\infty)$.
2) tenga como imagen al conjunto (0, 100).
3) tenga como imagen al conjunto $(-\infty,+\infty)$.
4) función resulte creciente o decreciente.

III) ¿qué condiciones pondrías?
Nota: en cada caso, entre paréntesis figura el detalle sobre qué tipo de condiciones se quiere que armes tu hipótesis para obtener las consecuencias ya escritas.

1) Si...(condición sobre $x$)...................................... entonces $(-0,2)\cdot 5^x+1>0$
2) Si...(condición sobre $f(x)=k\cdot a^x$).....................entonces $f(x)=k\cdot a^x$ es creciente.
3) Si...(condición sobre $f(x)=k\cdot a^x$).....................entonces $f(x)=k\cdot a^x$ tiene como asíntota al eje $x$.
4) Si...(condición sobre $f(x)=k\cdot a^x$).....................entonces $f(x)=k\cdot a^x$ intercepta al eje $x$.
5) Si... ...(condición sobre $k$, $a$ y $b$).......................entonces 4 pertenece a la imagen de la función $f(x)=k\cdot a^x+b$

IV) Recordarás que en el comienzo de la guía práctica de la función exponencial trabajamos con la función $f(x)=2^x$ y su gráfica. Vimos que si nos ubicábamos en un punto arbitrario del eje $x$ y trazábamos el segmento que une el punto de abscisa con la gráfica y luego realizábamos lo mismo con el punto $x+1$ el segundo segmento tiene el doble de altura que el primero. Tendrás que analizar

a) qué situación se da con la función $f(x)=3^x$
b) qué situación se da con la función $f(x)=4^x$

¿Cómo podrías generalizar esto que está ocurriendo?

**V)** a) Se dan los datos de dos funciones exponenciales con dominio: R e imagen: $(0; +\infty)$

$f(-1) = 0{,}7 \qquad f(4) = 22{,}4$

| x | 1 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| g(x) | 9 | 72 | 288 |

Hallá las fórmulas de f(x) y de g(x).

b) La función exponencial h(x) con dominio: R e imagen: $(-36; +\infty)$ cumple: $h(-5) = 936$ y $h(-3) = 72$. Hallá h(x).