Trabajo Práctico Nº 1

FUNCIONES

1. Determinar, cuando sea posible, el dominio más amplio (en el sentido de la inclusión) para que cada una de las siguientes correspondencias defina una función:

$m : D_m \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, m(x) = \sqrt{x-4}$

$z : D_z \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, z(x) = \pm\sqrt{x-4}$

$r : D_r \longrightarrow [0;5) \,/\, r(x) = -3x+2$

$t : D_t \longrightarrow [0;24) \,/\, t(x) = -3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + 24$

$n : D_n \longrightarrow [0;+\infty) \,/\, n(x) = x^2 - 4$

$w : D_w \longrightarrow (1;+\infty) \,/\, w(x) = \dfrac{3}{x-3} + 1$

$u : D_u \longrightarrow (-\infty;-4] \cup (-2;+\infty) \,/\, u(x) = \dfrac{-2x+4}{x-1}$

2. Graficar las siguientes funciones, indicar ceros, conjunto de positividad, negatividad y conjunto imagen.

$r : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, r(x) = x+1$

$l : (-4,3] \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, l(x) = -3x - 4$

$p : [-2,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, p(x) = x^2 - 9$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3$

$g : (-\infty,2] \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^3$

$h : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, h(x) = \sqrt{x}$

$j : [-4;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, j(x) = \sqrt{x+4}$

$k : [-3,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, k(x) = \sqrt{x+4}$

$m : [3,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, m(x) = \sqrt{x-3} + 2$

$n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, n(x) = -\sqrt{x} + 4$

$s : [-2,3) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, s(x) = x^2 - 2x + 3$

$t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, t(x) = x^4$

$u : [-1;1) \cup (1;2] \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, u(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x-1}$

3. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) Dos funciones son iguales si tienen el mismo conjunto dominio.

b) Dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y la misma imagen.

c) Las funciones $f:\mathbb{R}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ y $g:\mathbb{R}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=x^2$ son iguales.

4. Determinar D_f, D_g y D_k, de manera tal que $Im_f=Im_g=Im_k=Im_r$ siendo $r:[-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,r(x)=\sqrt{x+3}-2$.

$f:D_f\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=x^2-x-1$ $\qquad g:D_g\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$

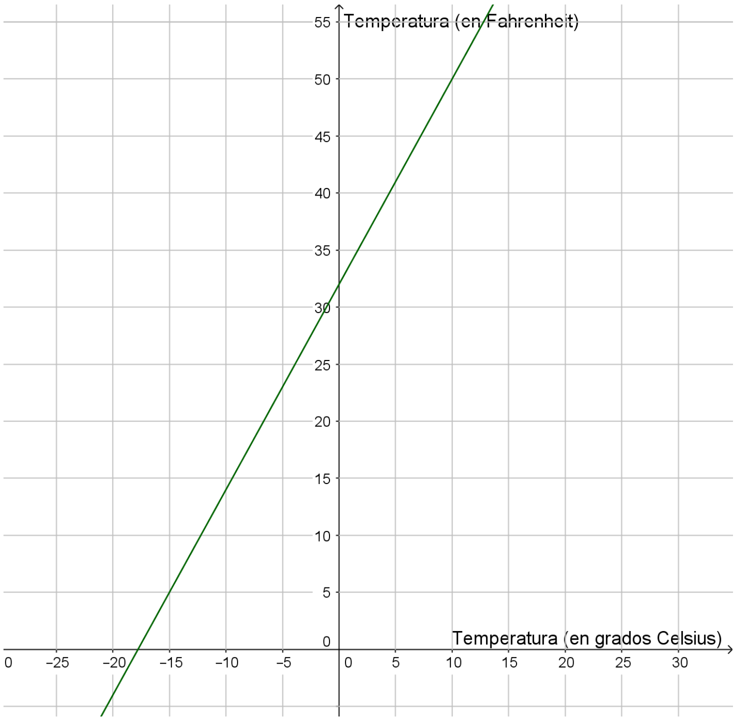
$k:D_k\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,k(x)=\dfrac{-2x+1}{x-3}$

5. Se define $h:\mathbb{R}-\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,h(x)=\dfrac{x-5}{2x+2}+1$ y se pide:

a) Determinar el valor de $a\in\mathbb{R}$, de modo tal que las funciones h y $f:\mathbb{R}-\{3\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=ax+3$ tengan el mismo conjunto imagen.

b) Hallar el conjunto imagen de la función: $g:A\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=-x^2-2x$, sabiendo que $A=C_h^-$.

6. La fórmula $K(x)=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{2297}{9}$ permite conocer la temperatura "K" en grados Kelvin, conocida la misma "x" en grados Fahrenheit, el gráfico, en cambio, muestra la relación entre la temperatura medida en grados Celsius y la misma medida en grados Fahrenheit.



Se pide:

a) ¿A cuántos grados Kelvin equivalen 10°C? ¿Y -15°C?
b) ¿A cuántos grados Kelvin equivalen 0°C?
c) Hallar una fórmula que permita conocer la temperatura en grados Kelvin, conocida la misma en grados Celsius.

7. Se definen $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=(x+1)\cdot(4-x)$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=-3x+1$ y se pide:

a) Calcular $f\left(g(-1)\right)$, $f\left(g(3)\right)$ y $f\left(g\left(-\tfrac{1}{3}\right)\right)$

b) Hallar el conjunto de ceros y los intervalos de positividad y negatividad de $f\left(g(x)\right)$.

8. Con los siguientes datos: $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,/\,h(x)=(x+1).(5-x)$ $f(5)=-1$, $f(3)=2$, $f(1)=-1$, $f(2)=5$, $f(-2)=6$, $g(-1)=6$, $g(6)=0$ y $g(2)=5$, calcular cuando sea posible:

a) $(h\circ f)(2)=$
b) $(g\circ f)(1)=$
c) $(f\circ g)(2)=$
d) $(g\circ f)(3)=$
e) $(f\circ g)(-1)=$
f) $(g\circ f)(5)=$
g) alguna raíz de gof.
h) $C^0_{h\circ f}$.

9. Dadas $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=6-(x+2)^2$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=x+3$, hallar los conjuntos de positividad y negatividad de $g\circ f$. Representar gráficamente.

10. Sean $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=-x^2-x-1$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=1-x$, $h(x)=(f\circ g)(x)$. Definir h y determinar el conjunto imagen e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

11. Dadas $f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=\frac{1}{3x+1}$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=4x+1$, escribir como intervalo o como unión de intervalos el conjunto $A=\{x\in R/(g\circ f)(x)<2\}$.

12. Se definen las funciones: $g:\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2}\right\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,g(x)=ax-b$ y

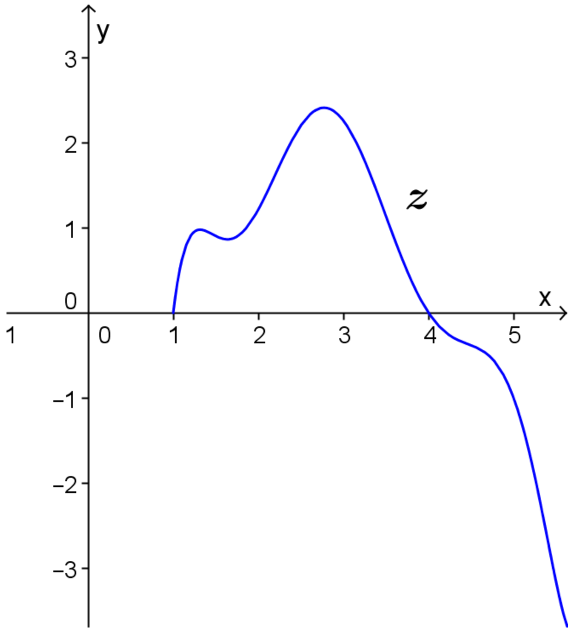
    $f:\mathbb{R}-\{-6\}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,\mathrm{f}(x)=\frac{2x}{x+6}$ y se pide:

    Hallar los valores a y b (reales) sabiendo que se cumple simultáneamente:

    - La ecuación de la asíntota vertical de la función $f\circ g$ es: $x=-\frac{5}{2}$.
    - $C^0_{f\circ g}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

13. ¿Es posible, dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=2x-4$, hallar otras dos funciones $g,\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tales que: $(f\circ g)(x)=x+6$ y $(h\circ f)(x)=x+6$? En caso afirmativo explicitar dichas funciones.

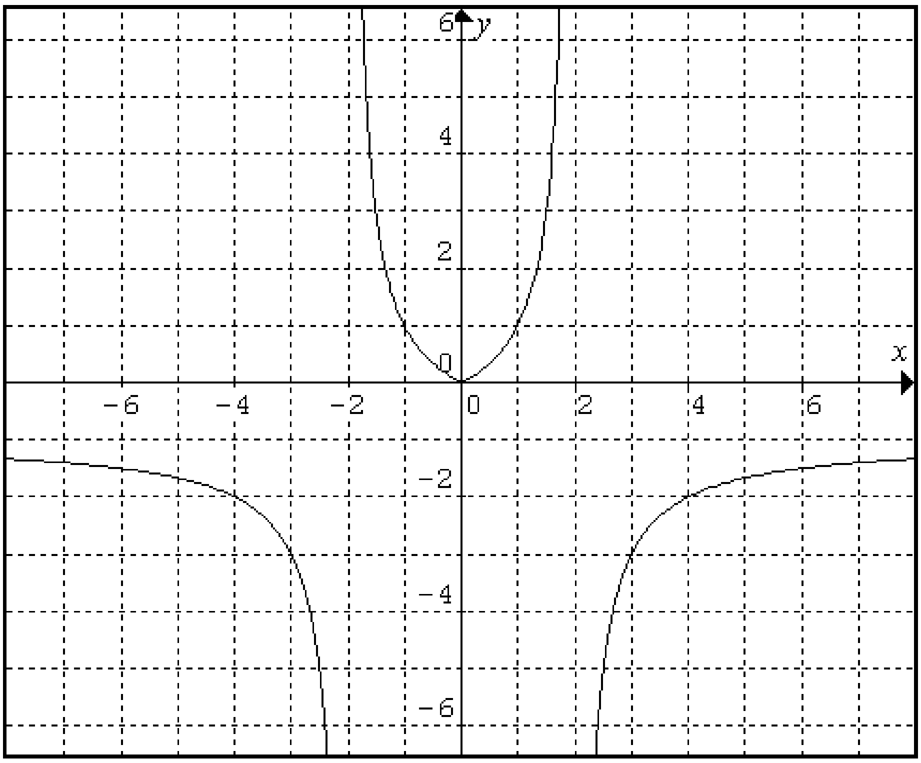
14. Dada la función $f:D_f\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=\sqrt{x-3}+1$ y el gráfico de la función z, se pide:
    a) Graficar *f*.
    b) Completar con <, > ó = según corresponda:
       $(z\circ f)(3)$.........0 $\quad$ $(z\circ f)(4)$.........0 $\quad$ $(z\circ f)(28)$.........0
    c) Hallar el conjunto de positividad de la función $z\circ f$.



d) Se define $g:[0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, g(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1$ y se pide:

Hallar C^0_{zog} y C^+_{zog}.

15. A continuación se muestra el gráfico de la función $f: R - \{-2; 2\} \to \mathbb{R}$
(x = 2 y x = - 2 son asíntotas verticales e y = -1 es asíntota horizontal)



y se define la función $g : \mathbb{R} - \{-3;3\} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, g(x) = \dfrac{2x}{3}$.

i. Calcular $(f \circ g)(4,5)$.
ii. Hallar $x \in \mathbb{R} \,/\, (f \circ g)(x) = -2$.
iii. Determinar el conjunto de positividad de la función $f \circ g$.

16. Si f(x)= x+k, estudiar los gráficos de g(x) y $g(f(x))$. Explicar.

17. Si f(x)= x+k, estudiar los gráficos de g(x) y $f(g(x))$. Explicar.

18. Dada $f : A \to B \,/\, f(x) = x^2 - 1$, determinar el mayor conjunto de A y de B, tal que:

a) f sea inyectiva y no sobreyectiva.
b) f sea sobreyectiva y no sea inyectiva.
c) f sea biyectiva.

19. ¿Existe alguna relación entre las funciones estrictamente crecientes o decrecientes y las funciones inyectivas?

20. Justificar la necesidad de que una función sea inyectiva y sobreyectiva para que exista su inversa.

21. Clasificar las siguientes funciones en (INYECTIVA, SOBREYECTIVA, BIYECTIVA)

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3x + 8$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = 4x^2 - 16$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-16;\infty) \,/\, f(x) = 4x^2 - 16$

d) $f : [0;\infty) \longrightarrow (-\infty;4] \,/\, f(x) = -x^2 + 4$

e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^5$

f) $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

22. Determinar $A, B \subseteq \mathbb{R}$ (máximos con respecto a la inclusión) de manera tal que las funciones sean biyectivas. Definir f^{-1} y representar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

a) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = 2 - 3x$

b) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = 2 - \dfrac{4}{3 - x}$

c) $f : [1;+\infty) \longrightarrow B \,/\, f(x) = (x-1)^2 + 2$

d) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

e) $f : (-\infty,-2] \longrightarrow B \,/\, f(x) = x^2 + 4x + 3$

f) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = \dfrac{x+1}{1+3x}$

g) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

h) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = x^3$

i) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = -\sqrt{x} + 4$

j) $f : A \longrightarrow B \,/\, f(x) = \dfrac{4}{x+3} + 2$

k) $f : [1,6] \longrightarrow B \,/\, f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

l) $f : A \longrightarrow [0,2] \,/\, f(x) = -2x + 2$

m) $f : (-\infty,-3) \longrightarrow B \,/\, f(x) = \dfrac{4}{x+3} + 2$

n) $f : (-3,+\infty) \longrightarrow B \,/\, f(x) = \dfrac{4}{x+3} + 2$

o) $f : A \longrightarrow (1,+\infty) \,/\, f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

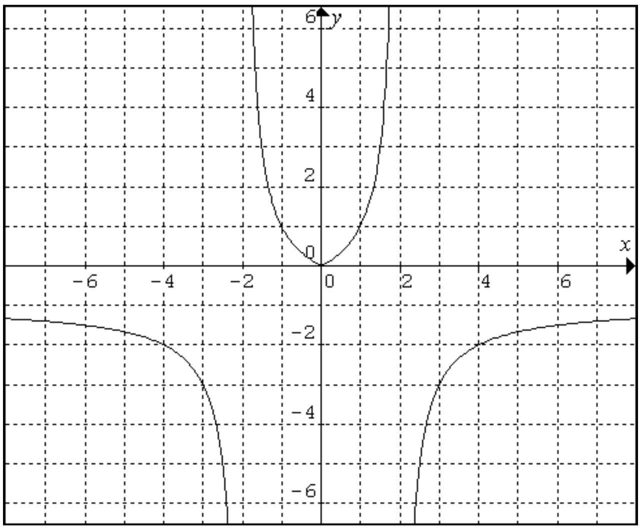
p) $f : [0,2] \longrightarrow B \,/\, f(x) = x^2 + 3x$

23. Sea $f : \mathbb{R} - \{5\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{a\} \,/\, f(x) = \dfrac{ax+4}{x-5}$. Calcular $a \in \mathbb{R}$ para que $f^{-1}(6) = -1$. Con el valor de a hallado, definir $f^{-1}(x)$.

24. Sean $f: \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x)=2-\dfrac{1}{x}$; $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, g(x)=3x-4$;
$h(x)=(g \circ f)(x)$. Definir $h^{-1}(x)$.

25. A continuación se muestra el gráfico de la función $f: R-\{-2;2\} \to \mathbb{R}$
(x = 2 y x = - 2 son asíntotas verticales e y = -1 es asíntota horizontal)

a) Observando el gráfico de *f*, restringir convenientemente el dominio o codominio (cuando sea posible), para que las funciones definidas cumplan con las condiciones pedidas. Si no es posible, explicar por qué.



- f_1 sea <u>inyectiva</u> y <u>no sobreyectiva</u>
  $f_1 : (-2,0] \to \ldots\ldots$
- f_2 sea <u>sobreyectiva</u> y <u>no inyectiva</u>
  $f_2 : \ldots\ldots \to [0,+\infty)$
- f_3 sea <u>biyectiva</u>
  $f_3 : \ldots\ldots\ldots \to (-\infty,-1)$
- f_4^{-1} sea <u>biyectiva</u>
  $f_4^{-1} : \ldots\ldots\ldots \to (-2,0]$
- f_5 sea inyectiva
  $f_5 : (-\infty,-2) \cup (-2,1] \to \ldots\ldots$

b) Se define $f_6 : [0,2) \to [0,+\infty)$, se pide graficar en el mismo sistema de ejes coordenados, en forma aproximada, la función inversa de f_6 indicando dominio y codominio de f_6^{-1}.

c) Se define $f_7 : (2,+\infty) \to (-\infty,-1)$. Calcular $f_7^{-1}(-2)$.

RESPUESTAS

1) $D_r = \left(-1; \dfrac{2}{3}\right]$ $D_n = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$ $D_t = [-3;+\infty)$ $D_w = (3;+\infty)$ $D_u = [0;1) \cup (1;+\infty)$

2) $C_r^0 = \varnothing$ $C_r^+ = \mathbb{N}_0$ $C_r^- = \varnothing$ $\operatorname{Im}_r = \mathbb{N}$

$C_l^0 = \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ $C_l^+ = \left(-4; \dfrac{4}{3}\right)$ $C_l^- = \left(-\dfrac{4}{3}; 3\right]$ $\operatorname{Im}_l = [-13;8)$

$C_p^0 = \{3\}$ $C_p^+ = (3;+\infty)$ $C_p^- = [-2;3)$ $\operatorname{Im}_p = [-9;+\infty)$

$C_f^0 = \{0\}$ $C_f^+ = \mathbb{R}^+$ $C_f^- = \mathbb{R}^-$ $\operatorname{Im}_f = \mathbb{R}$

$C_g^0 = \{0\}$ $C_g^+ = (0;2]$ $C_g^- = \mathbb{R}^-$ $\operatorname{Im}_g = (-\infty;8]$

$C_h^0 = \{0\}$ $C_h^+ = \mathbb{R}^+$ $C_h^- = \{\ \}$ $\operatorname{Im}_h = \mathbb{R}_0^+$

$C_j^0=\{-4\}$ $C_j^+=(-4;+\infty)$ $C_j^-=\varnothing$ $\mathrm{Im}_j=\mathbb{R}_0^+$

$C_k^0=\{\ \}$ $C_k^+=[-3;+\infty)$ $C_k^-=\varnothing$ $\mathrm{Im}_k=[1;+\infty)$

$C_m^0=\{\ \}$ $C_m^+=[3;+\infty)$ $C_m^-=\varnothing$ $\mathrm{Im}_m=[2;+\infty)$

$C_n^0=\{16\}$ $C_n^+=[0;16)$ $C_n^-=(16;+\infty)$ $\mathrm{Im}_n=(-\infty;4]$

$C_s^0=\{\ \}$ $C_s^+=[-2;3)$ $C_s^-=\varnothing$ $\mathrm{Im}_s=[2;11]$

$C_t^0=\{0\}$ $C_t^+=\mathbb{R}-\{0\}$ $C_t^-=\{\ \}$ $\mathrm{Im}_t=\mathbb{R}_0^+$

$C_u^0=\varnothing$ $C_u^+=[-1;1)\cup(1;2]$ $C_u^-=\varnothing$ $\mathrm{Im}_u=[u;3)\cup(3;7]$

3) a) F b) F c) V

4) $D_f=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, $D_k=[-2;3)$, no es posible definir D_g

5) a) $a=-\dfrac{1}{2}$ b) $\mathrm{Im}_g=(-3;1)$

6) a) 285 °K b) $(K\circ F)(x)=x+273°K$

7) b) $C^0_{f\circ g}=\left\{-1;\dfrac{2}{3}\right\}$ $C^+_{f\circ g}=\left(-1;\dfrac{2}{3}\right)$ $C^-_{f\circ g}=(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

8) a) $(h\circ f)(2)=0$ b) $(g\circ f)(1)=$ 6 c) $(f\circ g)(2)=$-1 d) $(g\circ f)(3)=$ 5

e) $(f\circ g)(-1)=$ no es posible f) $(g\circ f)(5)=$ 6 g) -2 es una raíz de gof. h) $\{2;6\}$

9) $C^+_{g\circ f}=(-5;1)$ $C^-_{g\circ f}=(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$

10) $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,/\,h(x)=-x^2+3x-3$ $\mathrm{Im}(h)=\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$ $C^{\nearrow}(h)=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$ $C^{\searrow}(h)=\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

11) $A=\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$

12) $a=2$ $b=1$

13) $g(x)=\dfrac{1}{2}x+5$ $h(x)=\dfrac{1}{2}x+8$

14) c) $C^+_{z\circ f}=(3;12)$ d) $C^0_{zog}=\{0;3;6\}$ $C^+_{zog}=(0,3)\cup(3,6)$

15) i. -3 ii . x = -6 o x = 6 iii. $C^+_{f\circ g}=(-3;0)\cup(0;3)$

18)

a) $A=[0;+\infty)$ $B=\mathbb{R}$ o $A=(-\infty;0]$ $B=\mathbb{R}$

b) $A=\mathbb{R}$ $B=[-1;+\infty)$

c) $A=[0;+\infty)$ $B=[-1;+\infty)$ o $A=(-\infty;0]$ $B=[-1;+\infty)$

21) a) Biyectiva b) no inyectiva, no sobreyectiva c) sobreyectiva, no inyectiva d) biyectiva e) biyectiva f) inyectiva, no sobreyectiva

22) a) $A=B=\mathbb{R}$ $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

b) $A=\mathbb{R}-\{3\}$ $B=\mathbb{R}-\{2\}$ $f^{-1}:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{3\}\,/\,f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{x-2}$

c) $B=[2;+\infty)$ $f^{-1}:[2;+\infty)\to[1;+\infty)\,/\,f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}$

d) $A=\mathbb{R}-\{-2\}$ $B=\mathbb{R}-\{1\}$ $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{-2\}\,/\,f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$

e) $B=[-1;+\infty)\quad f^{-1}:[-1;+\infty)\to(-\infty;-2]\,/\,f^{-1}(x)=-2-\sqrt{x+1}$

f) $A=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}\quad B=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\quad f^{-1}:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}/\,f^{-1}(x)=\frac{1-x}{3x-1}$

g) $A=[1;+\infty)\quad B=[2;+\infty)\quad f^{-1}:[2;+\infty)\to[1;+\infty)\,/\,f^{-1}(x)=1+(x-2)^2$

h) $A=B=\mathbb{R}\quad f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

i) $A=[0;+\infty)\quad B=(-\infty;4]\quad f^{-1}:(-\infty;4]\to[0;+\infty)\,/\,f^{-1}(x)=(4-x)^2$

j) $A=\mathbb{R}-\{-3\}\quad B=\mathbb{R}-\{2\}\quad f^{-1}:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{-3\}\,/\,f^{-1}(x)=\frac{4}{x-2}-3$

k) $B=\left[0;\frac{5}{2}\right]\quad f^{-1}:\left[0;\frac{5}{2}\right]\to[1;6]\,/\,f^{-1}(x)=2x+1$

l) $A=[0;1]\quad f^{-1}:[0;2]\to[0;1]\,/\,f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$

m) $B=(-\infty;2)\quad f^{-1}:(-\infty;2)\to(-\infty;-3)\,/\,f^{-1}(x)=\frac{-3x+10}{x-2}$

n) $B=(2;+\infty)\quad f^{-1}:(2;+\infty)\to(-3;+\infty)\,/\,f^{-1}(x)=\frac{-3x+10}{x-2}$

o) $A=(3;+\infty)\quad f^{-1}:(1;+\infty)\to(3;+\infty)\,/\,f^{-1}(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

p) $B=[0;10]\quad f^{-1}:[0;10]\to[0;2]\,/\,f^{-1}(x)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9+4x}}{2}$

23) $a=40\ ;\quad f^{-1}:R-\{40\}\longrightarrow R-\{5\}\,/\,f^{-1}(x)=\frac{5x+4}{x-40}$

24) $h^{-1}:R-\{2\}\longrightarrow R-\{0\}\,/\,h^{-1}(x)=\frac{3}{2-x}$

25) a) Se puede considerar como codominio de f_1 cualquier conjunto que contenga a $[0;+\infty)$.
Como dominio de f_2 se debe considerar el conjunto (-2;2).
Se puede considerar como dominio de f_3 el conjunto $(-\infty;-2)$ o el conjunto $(2;+\infty)$.
El dominio de la función f_4^{-1} es: $[0;+\infty)$.
Por el modo en que está definido el dominio de f_5, no es posible completar la definición para que la misma sea inyectiva.
c) 4