Universidad de Buenos Aires
Instituto Libre de Segunda Enseñanza

MATEMÁTICA

Guía de verano

Los alumnos de la cuarta división no deberán resolver los ejercicios que aparecen con *

1) Con la información dada, hallar la fórmula en cada caso:

a) El vértice de la parábola es $V=(-2;1)$ y pasa por el punto $A=(-1;4)$.

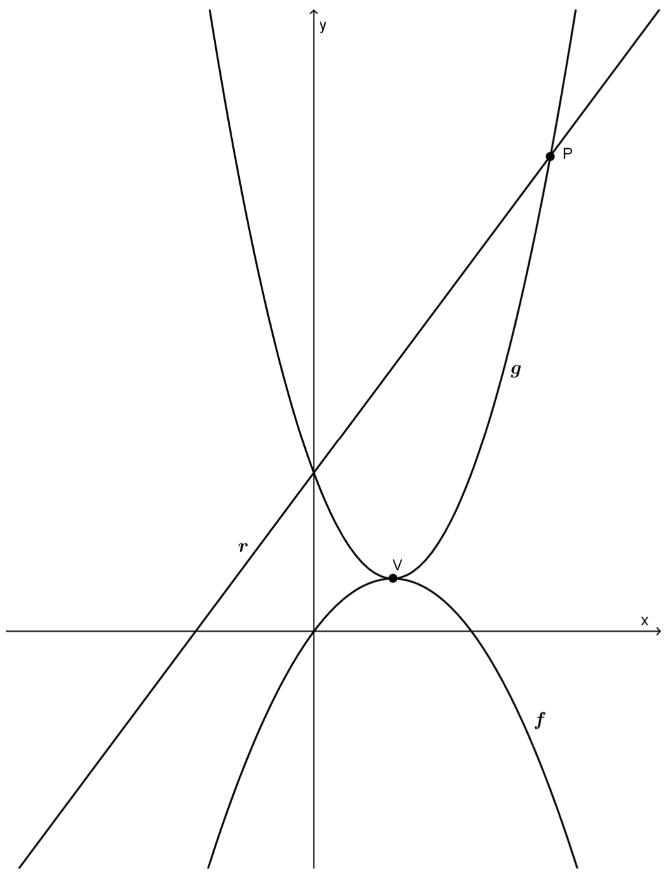
b) El gráfico de la función cuadrática pasa por los puntos $A=(-1;6)$; $B=(3;6)$; $C=(4;8)$.

c) La recta *f*, que pasa por el punto (9;-2) y cumple: $f(9)-f(7)=-10$.

2) Determinar la intersección de la curva $y=2x^2-5x+3$ con:

a) la recta y = x – 1
b) la recta que pasa por P = (-2;1) y tiene pendiente 1
c) la recta que pasa por Q = (1;-2) y R = $\left(\frac{1}{3};2\right)$

3) Sabiendo que la recta r tiene ecuación $y=\frac{4}{3}x+6$ y $f(x)=-\frac{2}{9}(x-3)^2+2$: Hallar la fórmula de g y las coordenadas del punto P.

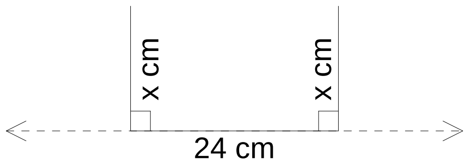


4) Dada la parábola $y=3x^2-kx-1$ y la recta $y=kx-2$ determinar que condición debe cumplir k, para que:

a) la recta sea tangente a la parábola
b) la recta no corte a la parábola

5) Dadas las rectas r_1 : $(k+1)x+(3-h)y+5=0$, r_2 : $(k-1)x+(h+3)y+2=0$, hallar los valores de h y de k de manera que las rectas se corten en el punto $P=\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

6) Una canaleta rectangular se construye doblando una lámina metálica de 24 cm de ancho como se muestra en la figura.
   a) Encuentre el área, en función de x, del corte transversal de la canaleta.
   b) ¿Cuánto debe medir x para que el volumen de agua que pasa por la canaleta sea la mayor posible?



7) Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $x^2-5x>0$

   b) $-x^2+3x<0$

   c) $x^2-4x-21\geq 0$

   d) $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5<0$

8) Las funciones $f(x)=x+a$ y $g(x)=x^2+bx+2b$, se intersecan en 2 puntos. Uno de ellos es $(-1;0)$. a) Determinar el otro punto de intersección. b) Verificar gráficamente.

9) Los gráficos de las funciones lineales $r(x)=2x-2$ y $q(x)=-x-3$ se intersecan en el punto A. El gráfico de la función cuadrática f(x) pasa por dicho punto e interseca el eje x en los mismos puntos que r(x) y q(x).Graficar las tres funciones

10) Determinar $a\in R$, tal que los puntos $A=(1;2)$, $B=(0;a)$ y $C=(a;0)$ $B\neq C$, estén alineados.

11) Sean A y B los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $f(x)=7x-5$ y $g(x)=4x^2-9x+7$. Calcular la distancia entre los puntos A y B.

12) Dada la función cuadrática $f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-4)$, determinar el valor real de ***a*** tal que la imagen de $f(x)$ sea el intervalo $(-\infty;9]$. Con el valor de ***a*** encontrado determinar el conjunto de negatividad de $f(x)$.

13) Dada $f(x) = 6 \cdot (x-1) \cdot (x-k)$, determinar el valor real de ***k*** tal que el gráfico de $f(x)$ corte al eje y en el punto de ordenada 12. Para el valor de k encontrado determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

14) Dadas $f(x) = x^2 + 4x + 1$ y $g(x) = 4x + 10$. Escribir como intervalo o como unión de intervalos el conjunto $A = \{x \in R / f(x) \geq g(x)\}$

15) Determinar todos los puntos del eje x que distan 10 del punto $P = (-1;6)$

16) Determinar analíticamente todos los puntos de la función lineal $f(x) = 2x$, que disten $\sqrt{5}$ del punto $P = (2;1)$.

17) Sean P el vértice y Q el punto donde la función cuadrática $f(x) = 3 \cdot (x+2)^2 - 5$ corta al eje y. Determinar la función lineal que pasa por los puntos P y Q.

18) La recta r_1, tiene abscisa al origen -2 y ordenada al origen 2, la recta r_2, tiene ordenada al origen 5 y es perpendicular a r_1.

a) Determinar los puntos de intersección de r_2 con la función $f(x) = x^2 - x + 1$.

b) Determinar la distancia entre los puntos de intersección obtenidos en el ítem a)

19) Dadas las siguientes funciones polinómicas, encontrar dominio, raíces, ordenada al origen, forma factorizada, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, gráfico aproximado:

a) $P(x) = 5x^4 - 125x^2 + 720$

b) $P(x) = 5x^3 + 15x^2 - 85x - 15$

c) $P(x) = x^6 - 4x^4 - 3x^2 + 12$

20) Sabiendo que P(x) = M(x) . N(x), siendo M(x) una función polinómica de grado 3 que corta al eje x en los puntos de abscisa x = -2, x = 5, cuya ordenada al origen es (0;6) y cuyo conjunto de negatividad es $C^- = (5;+\infty)$, y N(x), una función lineal cuyo gráfico es una recta paralela a $f(x) = 8x + 9$ y que pasa por $(-1;-14)$.

a) Determinar el grado de $P(x)$
b) Expresar $P(x)$ en forma factorizada.
c) Determinar las raíces de $P(x)$
d) Gráfico aproximado de $P(x)$

21) Determinar una función polinómica de grado 5 cuya ordenada al origen sea –4096, sus únicas raíces sean –3, -2, 4 y 8, cuyo conjunto de positividad sea $C^+ = (-3;-2) \cup (8;+\infty)$.

22) Determinar la distancia exacta del punto P a la recta de ecuación: $y = x + 2$, siendo P el punto donde se intersecan los gráficos de las funciones $h(x) = x^3 + 2x^2 + x$ y $r(x) = -2x - 6$.

23) Determinar una función polinómica P(x) de grado 6, tal que $C^- = (-\infty;-4) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$ y que verifique $P(1) = \frac{1}{2}$.

24) Determinar la fórmula de una función polinómica de grado 11 cuya ordenada al origen sea –7, sus raíces sean –5, -1, 3 y 9, su $C^+ = (-5;-1) \cup (9;+\infty)$.

25) Determinar la función polinómica de grado 13 que cumpla las siguientes condiciones: sus únicas raíces son –2, 5 y 8; $C^- = (-\infty;-2) \cup (-2;5)$ y $f(9) = 2$.

26) Dada la expresión de la función polinómica $f(x) = -x^5 + 8x^2$, se pide:

a) Dar la expresión factorizada de f.
b) Hallar la expresión de una función polinómica h, que cumpla simultánemante:
$C^+(h) = C^+(f)$ h(3) = 0 h(-1) = 1
c) Determinar la fórmula de la función cuadrática g, siendo $C^0(g) = C^0(f)$ y $\operatorname{Im}(g) = [-2,+\infty)$

27) Encontrar en cada caso la función homográfica f que cumpla:
a) El gráfico de f pasa por el origen de coordenadas y presenta asíntotas en x = 3 e y = 2.
b) Tenga asíntota horizontal en y = 4, tenga ordenada al origen 0, y su gráfico pase por el punto $(-1;-1)$.

28) Hallar la expresión de un polinomio *j(x)* de menor grado posible que verifique simultáneamente:
$C^0(j) = \{-1;0;2\}$ $C^+(j) = C^-(h)$, siendo $h(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

29) Determinar gráfica y analíticamente la intersección de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{3x}{2-x}$

b) $f(x) = -\dfrac{x-4}{x+1}$; $g(x) = -2x + \dfrac{1}{2}$

30) Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{2x-1}{2-4x} > 2$

b) $\dfrac{x+2}{x-1} < -2$

31) Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta y = -x+2, que pase por el punto de intersección de $f(x) = x^3 + 4x^2 + x$ con g(x) = -4x-2, sabiendo que la abscisa del punto de intersección es un número entero mayor que –2.

*32) Sabiendo que 1 no pertenece al dominio de $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3+3x^2-x-3}$, determinar dominio, asíntotas, conjunto imagen, C^+, C^-, intersecciones con los ejes, grafico aproximado.

*33) Se sabe que -1 no pertenece el dominio de $f(x) = \dfrac{6x^2-6}{-3x^3+6x^2+3x-6}$, se pide:

a) Dominio.
b) Asíntotas.
c) Conjunto imagen.
d) Intersección con los ejes.
e) Gráfico.
f) Determinar $x \in Dom_f \ / \ f(x) \leq 4$

*34) Sea $f(x) = \dfrac{x^5-4x^4+8x^2-32x}{x^3-2x^2-8x}$, se pide:

a) Dominio, imagen, conjunto de positividad e intervalo de decrecimiento.
b) Graficar f.
c) Hallar $x \in Dom_f \ / \ f(x) = 3$

35) Sean los polinomios $T(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3$ y $Q(x) = x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 3x$, se pide:

a) Expresar los polinomios *T* y *Q* como producto de polinomios primos, sabiendo que 1 es una raíz doble de *Q*.
b) Proponer un polinomio mónico J de grado 3, divisor de *Q*, cuya única raíz real sea 0.
c) Dar la expresión factorizada de un polinomio M, que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
   i. $C^+(M) = C^+(Q)$ ii. $C^-(M) = C^-(T)$ iii. El grado de multiplicidad de las raíces de *M* es menor a 3. iv. gr (*M*) = 7

36) Resolver la siguiente inecuación: $P(x) = L(x).C(x) \leq 0$ si se sabe que:

- L: función lineal, cuyo gráfico forma con los ejes coordenados en el segundo cuadrante un triángulo de área 1.
- C: función polinómica de grado 2.
- $C^0(P) = \{-1; 3; 4\}$
- $V_C \in L$ (V_C: vértice de la parábola C)

37) Sabiendo que 1 es la abscisa de uno de los puntos de intersección de los gráficos de $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 1$. Determinar todos los puntos de intersección.

38) Sea $f(x)$ una función polinómica de grado 3 tal que $f(-1) = 10$. Sabiendo que el gráfico de $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas y que los ceros de $g(x) = x^2 - x - 12$ son también ceros de $f(x)$, hallar $f(x)$. Determinar el conjunto de positividad, de negatividad, gráfico aproximado de $f(x)$.

39) Dada $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$, se pide:

a) Determinar la función homográfica $f(x)$ tal que la asíntota vertical pase por la menor de las raíces de la función cuadrática $g(x)$; la asíntota horizontal pase por la ordenada del vértice de la función cuadrática $g(x)$; además la función homográfica $f(x)$, corta al eje de ordenadas en $y = 1$.

b) Representar gráficamente la función homográfica $f(x)$.

40) Dada $f(x) = (x-2)\cdot(x^3 + 4x^2)$, se pide:

a) Determinar los ceros, intervalo de positividad, intervalo de negatividad, graficar la función polinómica.

b) Resolver: $f(x).(x^2 - 2x) \leq 0$

RESPUESTAS

1) a) $y = 3x^2 + 12x + 13$ b) $y = \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{24}{5}$ c) $f(x) = -5x + 43$

2) a) {(2;1);(1;0)} b) {(0;3);(3;6)} c) {($\frac{1}{2}$;1);(-1;10)}

3) $g(x) = \frac{4}{9} \cdot (x-3)^2 + 2$ $P = (9;18)$

4) a) $k = \pm\sqrt{3}$ b) $|k| < \sqrt{3}$

5) h= -1 , k = 2

6) a) A(x) = 24x – 2x^2 b) x = 6 cm

7) a) S = $\{x \in R / x < 0 \vee x > 5\}$ b) S = $\{x \in R / x < 0 \vee x > 3\}$

c) S = $\{x \in R / x \leq -3 \vee x \geq 7\}$ d) S = $\{x \in R / -2 < x < 5\}$

8) a) $P = (3;4)$

9) $A = \left(-\frac{1}{3};-\frac{8}{3}\right)$, $f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x-1) \cdot (x+3)$

10) $a = 3$

11) $d = 10 \cdot \sqrt{2}$

12) $a = -1$; $C^- = (-\infty;-2) \cup (4;\infty)$

13) $k = 2$; Crece $\left(\frac{3}{2};\infty\right)$; Decrece $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$

14) $A = (-\infty;-3] \cup [3;\infty)$

15) $A = (7;0)$ $B = (-9;0)$

16) $A = (0;0)$ $B = \left(\frac{8}{5};\frac{16}{5}\right)$

17) $y = 6x + 7$

18) a) $A = (2;3)$ $B = (-2;7)$ b) $d = 4 \cdot \sqrt{2}$

19) a) Dom = R ; $C^0 = \{-4;4;-3;3\}$; $f(0) = 720$; $P(x) = 5.(x-4) \cdot (x+4) \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

$C^+ = (-\infty;-4) \cup (-3;3) \cup (4;\infty)$; $C^- = (-4;-3) \cup (3;4)$

b) Dom = R ; $C^0 = \left\{-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2};3\right\}$; $f(0) = -15$;

$P(x)=5\cdot(x-3)\cdot\left(x+3-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+3+2\sqrt{2}\right)$ $C^+ = \left(-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2}\right)\cup(3;+\infty)$

$C^- = \left(-\infty;-3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-3+2\sqrt{2};3\right)$

c) Dom = R ; $C^0 = \left\{\sqrt[4]{3};-\sqrt[4]{3};2;-2\right\}$; $f(0) = 12$;

$P(x) = \left(x - \sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(x + \sqrt[4]{3}\right)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2 + \sqrt{3}\right)$

$C^+ = (-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\right)\cup(2;\infty)$; $C^- = \left(-2;-\sqrt[4]{3}\right)\cup\left(\sqrt[4]{3};2\right)$

20) a) grado de P(x) = 4 b) $P(x) = -\frac{12}{5}(x+2)^2\cdot(x-5)\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)$

c) $C^0 = \left\{-2;5;\frac{3}{4}\right\}$

21) $P(x)=\frac{16}{3}(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-4)^2\cdot(x-8)$

22) $\sqrt{2}$

23) Hay muchas opciones. Una de ellas es $P(x) = -\frac{1}{40}(x+4)\cdot(x-2)^3\cdot(x-3)^2$

24) Hay muchas. Una posibilidad es $f(x) = \frac{7}{405}(x+5)\cdot(x+1)^7\cdot(x-3)^2\cdot(x-9)$

25) Hay muchas posibilidades. Una de ellas es $f(x) = \frac{1}{242}(x-5)\cdot(x+2)^2\cdot(x-8)^{10}$

26) a) $f(x)=-x^2(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$ b) $h(x)=-\frac{1}{48}x^2(x-2)(x-3)^2$ c) $g(x)=2x^2-4x$

27) a) $f(x)=\frac{6}{x-3}+2$; b) $f(x)=\frac{4x}{x+5}$

28) $j(x)=ax(x+1)^2(x-2)^2 \quad a<0$

29) a) $P = (1;3)$ y $Q = \left(-\frac{4}{7};-\frac{2}{3}\right)$;b) No existe

30) a) $S=\varnothing$ b) $S=(0;1)$

31) y = x+3

32) $Dom = R - \{-1;1;-3\}$, $A.V.: x = 1$, $A.H.: y = 1$, $\mathrm{Im} = R - \left\{1;\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right\}$,
$C^{+} = (-\infty;1) \cup (2;\infty) - \{-1;-3\}$, $C^{-} = (1;2)$, Intersección con el eje x $x = 2$, Intersección con el eje y : $y = 2$

33) a) $Dom = R - \{-1;1;2\}$; b) $A.V.: x = 2$; $A.H. y = 0$; c) $\mathrm{Im} = R - \left\{0;\frac{2}{3};2\right\}$; d) Intersección con el eje y $f(0) = 1$, No hay intersección con el eje x ; f) $S = \left\{\left(-\infty;\frac{3}{2}\right] \cup (2;\infty)\right\} - \{-1;1\}$

34) a) $\mathrm{Dom} = \mathrm{R} - \{-2;0;4\}$ $\mathrm{Im} = [3;+\infty) - \{12\}$ $\mathrm{C}^{+} = \mathrm{R} - \{-2;0;4\}$ $\mathrm{C}^{\searrow} = (-\infty,1) - \{-2;0\}$ c) x = 1

35) a) $T(x) = x^3(x+2)^2$ $Q(x) = (x^2+3)(x-1)^2 x$ b) $J(x) = x(x^2+3)$

36) $-72(x+1)(x-3)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1,3] \cup [4,+\infty)$

37) $A = (-1;0)$; $B = (1;0)$; $C = (-2;-3)$

38) $f(x) = x \cdot (x-4) \cdot (x+3)$; $C^{+} = (-3;0) \cup (4;\infty)$; $C^{-} = (-\infty;-3) \cup (0;4)$

39) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

40) a) $C^{0} = \{-4;0;2\}$ $C^{+} = (-\infty;-4) \cup (2;\infty)$ $C^{-} = (-4;0) \cup (0;2)$ b) $x \in [-4,0] \cup \{2\}$