Universidad de Buenos Aires
Instituto Libre de Segunda Enseñanza

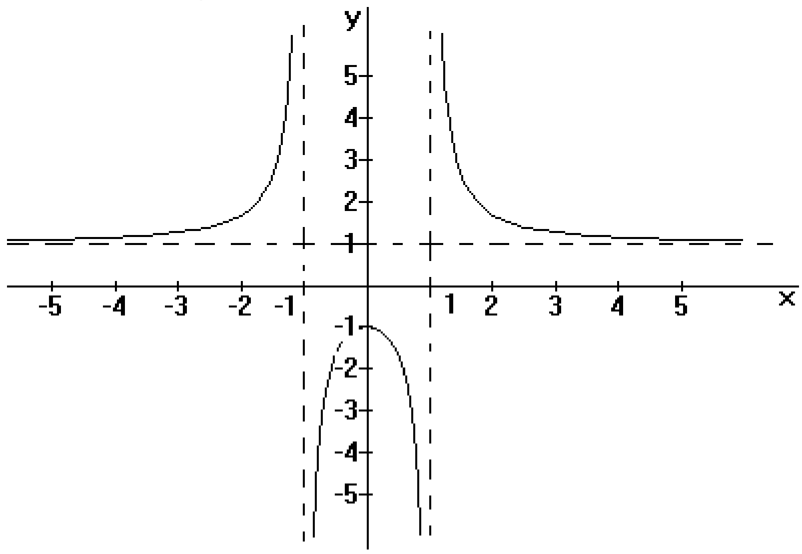
MATEMÁTICA

CUARTO AÑO - 2016
QUINTO AÑO - 2017

1) Hallar la fórmula de función cuadrática g, que cumple las dos condiciones simultáneamente: 1) $g(1)=g(6)=8$ 2) $g(0)=20$

2) Se quiere que el conjunto imagen de la función g del ejercicio anterior sea $[0;+\infty)$ Modifique solo la segunda condición (ordenada al origen de g) para que esto ocurra.

3) Completar de acuerdo al gráfico:



- Dom f = ... • Im f = ...
- C $^{+}$ = ... • C $^{-}$ = ... • C ^{0} = ...
- f crece en .... • f decrece en ....
- $f_1:(-\infty,-1)\to$ ……............. biyectiva
- $f_2:[0;\infty)-\{1\}\to$ ……............. biyectiva

4) Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y=-x+3$, que pase por el punto de intersección de $f(x)=x^3+x^2-3x+4$ con $g(x)=-2x+5$, sabiendo que la abscisa del punto de intersección es un número natural.

5) Dada $g(x)=x^2+2x-3$, se pide:

a) Determinar la función homográfica $f(x)$ tal que la asíntota vertical sea el eje de simetría de la función cuadrática $g(x)$; la asíntota horizontal corta al eje de las ordenadas en $y=1$; además se pide que la función homográfica $f(x)$, pase por la menor de las raíces de $g(x)$.

b) Representar gráficamente la función homográfica $f(x)$.

6) Sea $f(x)$ una función polinómica de grado 3 tal que $f(-1)=6$. Sabiendo que el gráfico de $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas y que los ceros de $g(x)=x^2-3x-10$ son también ceros de $f(x)$, hallar $f(x)$. Determinar el conjunto de positividad, de negatividad de $f(x)$.

7) Determinar el valor real de ***a,*** tal que $f^{-1}(0)=\dfrac{13}{2}$, sabiendo que $f(x)=\dfrac{4}{x-7}+a$. Para el valor de ***a*** hallado, dar las ecuaciones de las asíntotas de $f(x)$.

8) Dada $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,\mathrm{f(x)}=2-\mathrm{e}^{5-\mathrm{x}}$, definir $f^{-1}(x)$, dominio y conjunto imagen de la función inversa.

9) Dada $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+1}{ax^2-10}$, determinar el valor real de ***a,*** de manera que la recta de ecuación $y=\dfrac{2}{5}$ sea asíntota horizontal de $f(x)$. Para el valor de ***a*** encontrado, escribir las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de $f(x)$.

10) Determinar el valor real de *a*, tal que el máximo de $f:[0;4\pi]\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=4sen\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-a$ sea 3. Para el valor de a encontrado, determinar todos los valores del dominio para los cuales $f(x)$ alcanza su valor máximo.

11) Determinar el conjunto de positividad de $f(x)=\sqrt{2-2\cdot sen(x)}$ en el intervalo $\left(0;\dfrac{5}{2}\pi\right)$

12) Se está estudiando la evolución de una colonia de 100 roedores que habitan en una isla. A los 4 meses de comenzado el estudio se realiza un conteo y se detectan 560 roedores. Dadas las condiciones del medio se establece que no podrán convivir más de 2000 ejemplares.

a) ¿Qué fórmula modela la situación?

$$R_1(t)=\frac{2.000}{1+19e^{5t}} \qquad R_2(t)=\frac{2.000}{1+19e^{0,5t}} \qquad R_3(t)=\frac{2.000}{1+19e^{-0,5t}}$$

b) ¿La población de roedores superará los 2000 individuos?

13) Determinar los ceros de $f:[0;2\pi]\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=4\cdot cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-2$.

14) Dada $f(x)=a\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+5$, determinar el valor real de a, tal que $\mathrm{Im}_f=[2;8]$. Con el valor de a > 0 encontrado, hallar un x sabiendo que $f(x)=2$.

15) Dada la función polinómica $g(x)=2x^4-3x^3+x^2-15x-45$, se pide:

a) Teniendo en cuenta que g se puede escribir de la forma: $\mathrm{g(x)}=\left(\mathrm{x}^2+5\right).\mathrm{f(x)}$.
Hallar f(x)

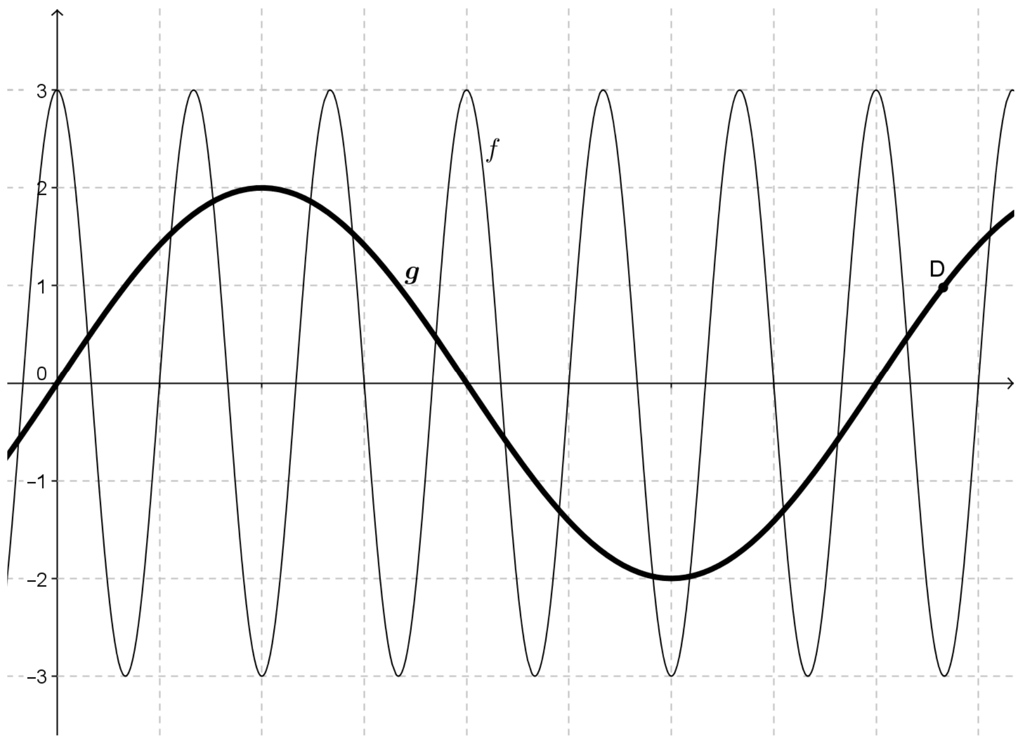
b) Proponga una función polinómica h que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
. grado 4 $\quad .\,h^{-1}(27)=0 \quad .\,h(1)=0\,. \quad .\,C_h^-=C_g^+$

c) Sabiendo que las gráficas de g y $f(x)=-2x^3+ax^2-59x-29$ se intersecan en un punto de abscisa 2 y otro de abscisa -4, hallar ***a*** y las coordenadas de todos los puntos de intersección.

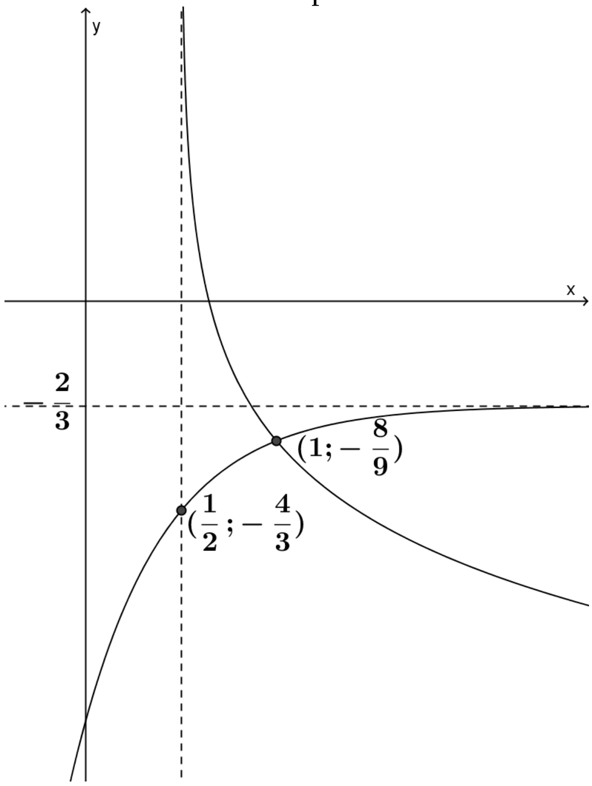
d) Hallar $x\in\mathbb{R}\,/\,g(x)>0$.

16) La fórmula de uno de los gráficos que se muestran es $y=2sen\left(\frac{1}{2}x\right)$.

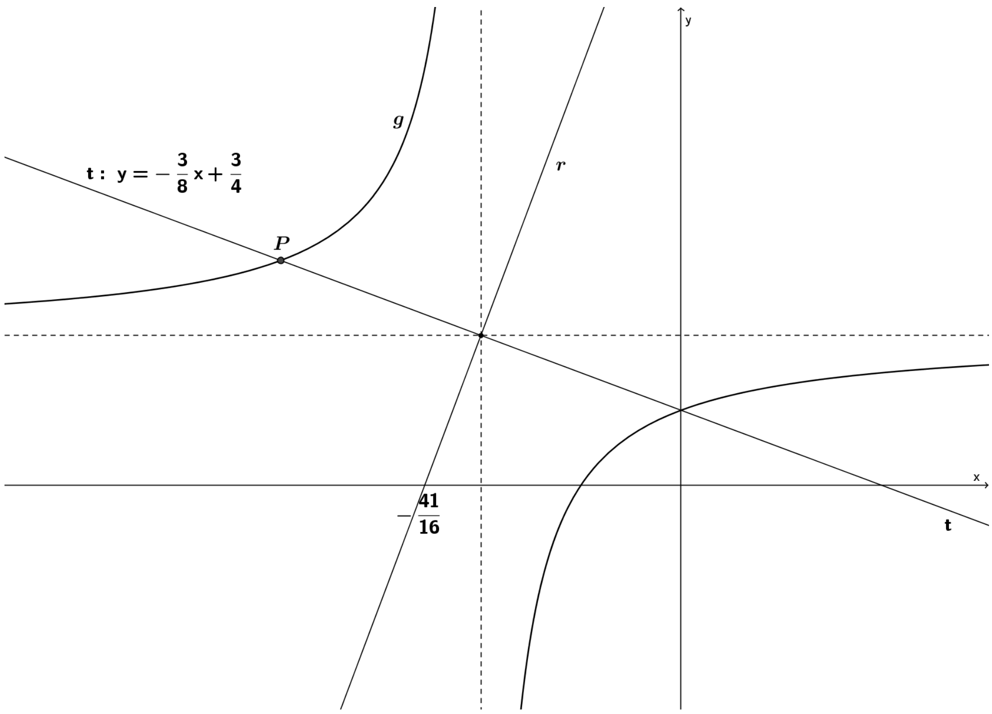
Determinar las coordenadas del punto D y una fórmula que corresponde al otro gráfico.



17) Se muestran los gráficos de una función exponencial, una función logarítmica de base 1/4 y sus respectivas asíntotas con línea punteada. Dar la fórmula de cada función.



18) El gráfico muestra dos rectas perpendiculares y una hipérbola con sus asíntotas. Determinar las coordenadas del punto P.

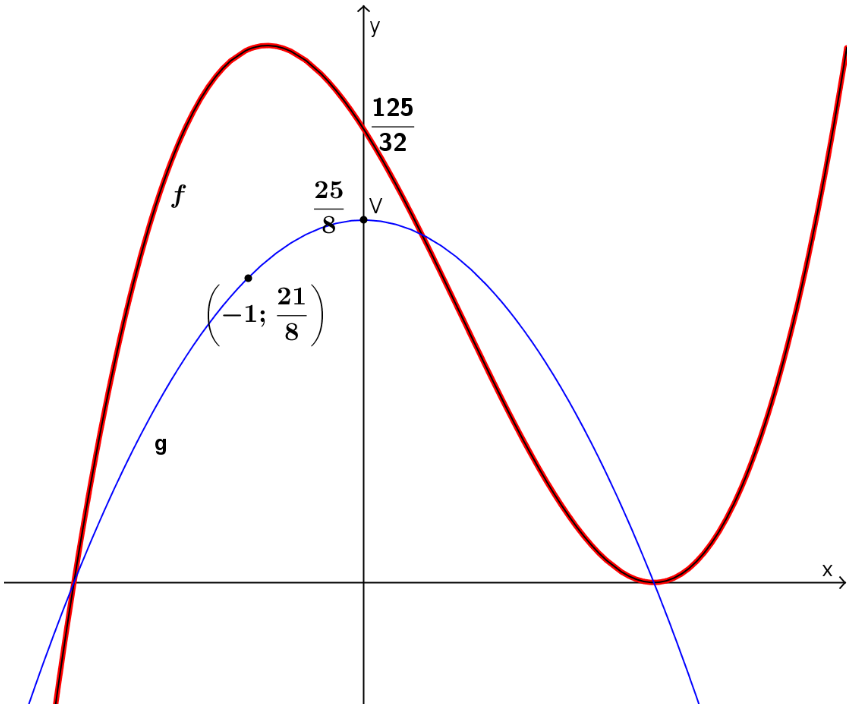


19) Hallar la ecuación de la recta que cumple simultáneamente:
- su abscisa al origen es 2
- interseca a la gráfica de $y=-x^2+2x-1$ en un solo punto.

20) Dada $f : D \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x}{x^2 - x}$

a- Dar la expresión simplificada de *f*.
b- Hallar el conjunto de positividad y el conjunto imagen de *f*.
b- Graficar *f*.

21) A continuación se muestra el gráfico de una función polinómica de grado 3 y una parábola. Determinar la fórmula de la función polinómica *f*.



22) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $log_5\left(x^2 - 8\right) = 5^{x+2} + 3.5^{x+1} - 40.5^x$

b) $log_3 x - log_{27} 9x = 0$

c) $\left(e^{cos3x} - \sqrt{e}\right)\left(ln\left(senx\right)\right) = 0 \qquad x \in [0, 2\pi]$

RESPUESTAS

1) $g(x)=2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$

2) $g(0)=\frac{392}{25}$

3) a) $Dom=R-\{1;-1\}$ **;** $\mathrm{Im}=(-\infty;-1]\cup(1;\infty)$ **;** $C^+=(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ **;**
$C^-=(-1;1)$ **;** $C^0=\lozenge$ Crece: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$; Decrece: $(0;1)\cup(1;\infty)$
$\mathrm{f}_1:(-\infty,-1)\to(1;+\infty)$ $\mathrm{f}_2:[0;\infty)-\{1\}\to(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$

4) $y=x+2$

5) $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

6) $f(x)=x\cdot(x-5)\cdot(x+2)$ $C^+=(-2;0)\cup(5;\infty)$ $C^-=(-\infty;-2)\cup(0;5)$

7) $a=8$; $A.V.: x=7$; $A.H.: y=8$

8) $f^{-1}(x)=-\ln(-x+2)+5$; $Dom_{f^{-1}}=(-\infty;2)$; $\mathrm{Im}_{f^{-1}}=R$

9) $a=10$; $A.V.: x=1; x=-1$

10) $a=1$; $x=\pi$; $x=3\pi$

11) $C^+=\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{5}{2}\pi\right)$

12) a) R_3 b) No superará los 2000 roedores.

13) $C^0=\left\{\frac{1}{12}\pi;\frac{5}{12}\pi;\frac{13}{12}\pi;\frac{17}{12}\pi\right\}$

14) $a=3$ o $a=-3$; $x=\frac{3}{4}\pi$

15) a) $f(x)=2x^2-3x-9$ b) $h(x)=-6\left(x+\frac{3}{2}\right).(x-3).(x-1)^2$ c) a = 25 (2;-63) $\left(\frac{1}{2};-\frac{105}{4}\right)$ (-4;735) d) $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(3;+\infty)$

16) $D=\left(\frac{13}{3}\pi;1\right)$ $f(x)=3sen\left(3x-\frac{3}{2}\pi\right)$ o $f(x)=3cos(3x)$

17) $y = log_{1/4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{25}{18}$ $\quad y = -2\left(\frac{1}{9}\right)^{x} - \frac{2}{3}$

18) $P = \left(-4; \frac{9}{4}\right)$

19) y = -4x + 8

20) a) $f : \mathbb{R} - \{0;3\} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 - 2x + 3$ $\quad C_f^{\,+} = \mathbb{R} - \{0;1\}$ $\quad \mathrm{Im}_f = (2;+\infty)$

21) $f(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2\left(x + \frac{5}{2}\right)$

22) a) $S = \{-3;3\}$ b) $S = \{3\}$ c) $S = \left\{\frac{\pi}{9}; \frac{5}{9}\pi; \frac{7}{9}\pi; \frac{11}{9}\pi; \frac{13}{9}\pi; \frac{17}{9}\pi\right\}$